A.G. KUROSH
G.E. CHILOV
V.G. BOLTIANSKI

INITIATION AUX MATHÉMATIQUES

3

ALEKSANDR GENNADYEVICH KUROSH

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DE DEGRÉ QUELCONQUE

GEORGIY EVGENEVICH SHILOV

ANALIZE MATHÉMATIQUES DANS LA CLASSE DES FONCTIONS RATIONNELLE

VLADIMIR GRIGOREVICH BOLTYANSKY

QU'EST-CE QUE LA DÉRIVATION ?

AVANT-PROPOS

Le livre présenté au lecteur constitue le troisième opuscule de la collection « Initiation aux mathématiques » préparée par les Editions « Mir » *). On y a réuni trois fascicules contenant les cours d'éminents mathématiciens soviétiques, qui, de façon claire et explicite, sans toutefois déroger à la rigueur de l'exposé, décrivent à l'intention des élèves des classes terminales les principales notions des mathématiques supérieures.

Dans le premier fascicule « Equations algébriques de degré quelconque » Alexandre Kurosh, en s'appuyant sur la série des cours donnés dans des cercles de mathématiques près l'Université de Moscou, présente les résultats et les méthodes de la théorie générale des équations algébriques.

Dans le second fascicule Guéorgui Chilov dans un cours intitulé « Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles » sur la base de cette classe limitée de fonctions explique ce qu'est une dérivée et une primitive.

Enfin, dans le troisième fascicule, au titre invitant à l'étude, « Qu'est ce que la dérivation? » Vladimir Boltianski sur des exemples tirés de la physique tente de décrire certaines notions des mathématiques supérieures, telles que la dérivée, l'équation différentielle, le nombre *e*, les logarithmes naturels etc...

Les trois auteurs sont des mathématiciens émérites connus non seulement en U.R.S.S. mais aussi à l'étranger.

Alexandre Kurosh, docteur ès sciences physiques et mathématiques, professeur, est un illustre algébriste soviétique. Docteur *honoris causa* de l'Université de Lyon il est connu déjà du lecteur français par ses ouvrages « Leçons d'al-

*) Voir dans cette collection les livres déjà parus: Opusc. n° 1 « Quatre cours de mathématiques » (Courbes remarquables, Aires et Logarithmes, Suites récurrentes, Nombres complexes et représentation conforme) par A. Markouchévitch et opusc. n° 2 « Suite de Fibonacci et Caractères de divisibilité » par N. Vorobiev, Editions « Mir », 1973.

gèbre générale » et « Cours d'algèbre supérieure », traduits en français.

Guéorgui Chilov, docteur ès sciences physiques et mathématiques, professeur, est l'auteur de nombreux monographies et traités parmi lesquels on peut mentionner son ouvrage sur l'Analyse mathématique (« Fonction d'une variable ») en trois parties, traduit également en français par les Editions « Mir ».

Vladimir Boltianski, docteur ès sciences physiques et mathématiques, membre correspondant de l'Académie des sciences pédagogiques, est un lauréat du Prix Lénine ainsi que de nombreux Prix d'Etat. Il est l'auteur d'un grand nombre de monographies et de traités mathématiques et pédagogiques.

Cet opuscule comme les précédents est destiné aux élèves des classes terminales désireux d'étendre leurs connaissances en mathématiques supérieures. Il peut également servir à tout lecteur connaissant le programme de l'enseignement secondaire et entreprenant l'étude autodidactique des mathématiques.

A. Kurosh

Équations algébriques de degré quelconque

1. INTRODUCTION

Dans le programme du cours scolaire d'algèbre les équations occupent sans doute une place centrale. En nous bornant aux équations à une inconnue résumons en quelques mots l'essentiel.

Tout écolier apprend avant tout à résoudre les équations du *premier* degré. Il sait que l'équation du type

$$ax + b = 0,$$

où $a \neq 0$, a une racine unique

$$x = -\frac{b}{a}.$$

De même, lui est familière la formule donnant les solutions de l'équation du *second* degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où $a \neq 0$, a savoir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si les coefficients de l'équation sont des nombres réels, la formule fournit deux racines réelles distinctes dans le cas où le nombre sous le radical est positif, c'est-à-dire quand $b^2 - 4ac > 0$. Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation n'a qu'une seule racine qui est dite *multiple*; pour $b^2 - 4ac < 0$ l'équation n'a pas de racines réelles.

Enfin, l'écolier sait résoudre certains types d'équations du *troisième* et du *quatrième* degrés, notamment celles qui se réduisent sans peine à des équations du second degré. Telle est, par exemple, l'équation du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

qui possède la racine $x = 0$ et, après simplification par x se transforme en l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

A une équation du second degré se ramène l'équation du quatrième degré du type particulier, dite *bicarrée*,

$$ay^4 + by^2 + c = 0;$$

pour la résoudre il suffit de poser

$$y^2 = x,$$

de trouver les racines de l'équation du second degré ainsi obtenue et d'en extraire les racines carrées.

Soulignons que ce ne sont que quelques-uns des types, bien particuliers, des équations du troisième et du quatrième degrés. Dans l'algèbre secondaire, on ne donne aucune méthode de résolution des équations du troisième et du quatrième degrés, sans parler des équations de degrés supérieurs. Néanmoins, dans bien des problèmes de la technique, de la mécanique et de la physique, on a affaire à des équations algébriques de degrés élevés. La théorie des équations algébriques du n-ième degré, où n est un entier positif quelconque, se développait durant plusieurs siècles, elle forme actuellement l'une des parties principales du cours d'algèbre supérieure que l'on enseigne dans les universités et les écoles normales supérieures.

2. NOMBRES COMPLEXES

La théorie des équations algébriques s'appuie essentiellement sur la théorie des nombres complexes dont les bases sont enseignées à la terminale de l'école secondaire. Nous avons souvent observé que la notion de nombres complexes n'est pas facile à comprendre pour l'écolier. Il lui reste des doutes

sur leur existence réelle. Rien d'étonnant, si l'on se souvient que de pareils doutes étaient connus aux savants des siècles passés, lorsque les nombres complexes commençaient à pénétrer dans l'usage mathématique; nous en percevons les traces dans le nom même de « nombres imaginaires » dû à cette époque. Pour les mathématiques modernes, il n'y a rien d'énigmatique dans les nombres complexes, ils ne sont pas plus « imaginaires » que les nombres négatifs ou irrationnels.

Le besoin des nombres complexes est apparu en rapport avec le fait qu'il est impossible, si l'on reste dans le domaine des nombres réels, d'extraire la racine carrée d'un nombre réel négatif. Ceci conduit, nous le savons, à ce que certaines équations du second degré n'ont pas de racines réelles; l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

en est la plus simple. On est venu naturellement à l'idée de compléter l'ensemble des nombres de façon que les équations du type indiqué possèdent elles aussi des racines.

La notion de nombre s'enrichissait, à mesure que l'écolier avançait dans ses études. Il a commencé par étudier en arithmétique élémentaire les *nombres entiers positifs*. C'est bien vite que sont apparues les *fractions*. Dans le cours d'algèbre, il rencontre les nombres négatifs, donc le système de tous les *nombres rationnels* est construit. Enfin, l'adjonction des nombres irrationnels a conduit au système de tous les *nombres réels*.

Les élargissements successifs de l'ensemble des nombres permettaient de trouver les racines de certaines équations qui n'en avaient pas eu avant. Ainsi, il est possible de parler de la racine de l'équation

$$2x - 1 = 0$$

après que les fractions ont été introduites; l'équation

$$x + 1 = 0$$

n'admettait pas de racine avant l'introduction des nombres négatifs, il en était de même de l'équation

$$x^2 - 2 = 0$$

avant l'apparition de la notion de nombres irrationnels.

Rien n'empêche de faire un nouveau pas sur la voie d'enrichissement de l'ensemble des nombres, et nous allons voir, en grands traits, comment ce pas se réalise.

On sait qu'à tout point A d'une droite sur laquelle on choisit un sens positif de parcours, l'origine O et l'unité de longueur (fig. 1), on peut faire correspondre sa *coordonnée*, i.e. un nombre réel qui exprime, en unités choisies de l'échelle, la distance de A à O, positive ou négative, suivant que A est à droite ou à gauche du point O. A tous les points de la droite on fait ainsi correspondre les nombres réels différents, et l'on peut démontrer que tout nombre réel sera alors utilisé. On peut donc considérer les points de notre droite comme les images des nombres correspondants, c'est-à-dire que les nombres trouvent leur place sur la droite. Appelons notre droite *droite numérique*.

Est-il possible d'élargir l'ensemble des nombres de manière à représenter les nouveaux nombres par les points du plan? Pour le moment, nous ne connaissons aucun système de nombres de ce genre, il s'agit d'en construire un.

La construction doit commencer par le choix du « matériel » avec lequel on fabriquera le nouveau système de nombres, i.e. il faut d'abord décider comment sont les objets qui joueront le rôle de nouveaux nombres; ensuite, il faut indiquer les règles selon lesquelles on effectuera sur ces objets les opérations algébriques: addition et multiplication, soustraction et division. Comme nous voulons construire le système de nombres dont les images soient tous les points du plan, le plus simple serait de considérer ces points mêmes en tant que nouveaux nombres. Pour que cela soit possible, il suffit d'indiquer comment réaliser les opérations algébriques sur les points, notamment, quel est le point qu'on



Fig. 1

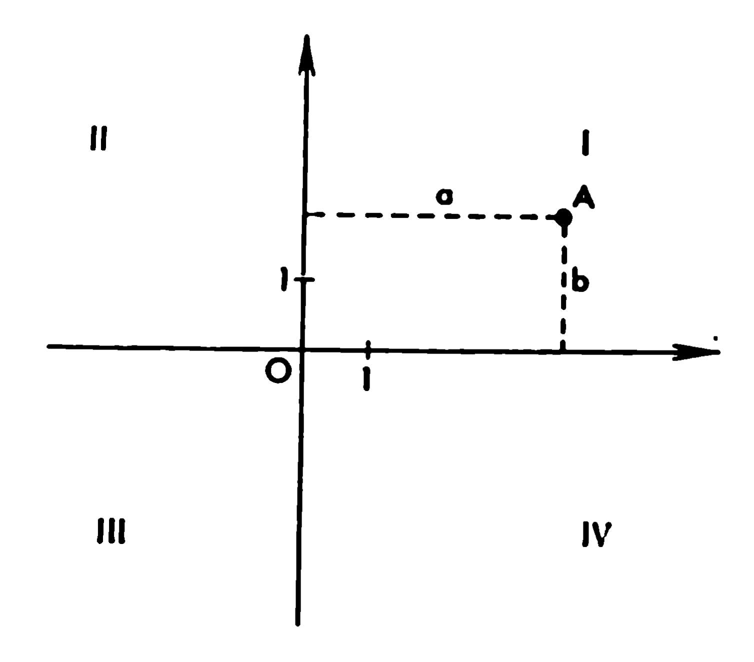


Fig. 2

doit appeler somme de deux points donnés du plan, quel est leur produit, etc.

De même que la position d'un point sur la droite est bien déterminée par un seul nombre réel, sa coordonnée, la position d'un point du plan peut être déterminée par deux nombres réels. Pour le voir, traçons dans le plan deux droites perpendiculaires l'une à l'autre qui se coupent en un point O, choisissons sur chacune d'elles un sens de parcours positif et l'unité de longueur (fig. 2). Appelons ces droites *axes des coordonnées*; la droite horizontale sera l'*axe des abscisses*, la verticale l'*axe des ordonnées*. Tout le plan est partagé par les axes des coordonnées en quatre quadrants qui sont numérotés de la manière indiquée sur la figure.

La position de n'importe quel point A du premier quadrant (fig. 2) est déterminée en fixant deux nombres réels: a qui exprime en unités choisies la distance du point à l'axe des ordonnées (abscisse du point A), et b qui exprime en unités choisies la distance du point à l'axe des abscisses (ordonnée du point A). Inversement, pour tout couple (a, b) de nombres réels positifs on peut indiquer dans le premier quadrant un point bien déterminé ayant a pour abscisse et b pour ordonnée. Pour les autres quadrants, on procède de façon analogue. Pourtant, afin d'avoir une correspondance biunivoque entre tous les points du plan et les couples de leurs coordonnées (a, b), c'est-à-dire pour éviter la situation où plusieurs points du plan soient définis par un même couple (a, b) de coordonnées, nous choisissons négatives les abscisses des points des IIe et IIIe quadrants et les ordonnées des points des IIIe et IVe quadrants. Notons que les points de l'axe des abscisses ont les coordonnées de la forme $(a, 0)$, ceux de l'axe des ordonnées de la forme $(0, b)$ où a et b sont des nombres réels.

Nous savons maintenant donner tous les points du plan par les couples de nombres réels. Cela nous permet d'abandonner l'image du point A du plan de coordonnées (a, b) et de parler d'un point (a, b) tout court.

Définissons l'addition et la multiplication des points du plan. Ces définitions semblent de prime abord bien artificielles, mais on pourrait démontrer qu'elles seules permettent d'atteindre le but que nous avons visé, à savoir rendre possible l'extraction d'une racine carrée d'un nombre réel négatif.

Soient (a, b) et (c, d) deux points du plan. Appelons leur *somme* le point d'abscisse $a + c$ et d'ordonnée $b + d$, de sorte que

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Appelons ensuite *produit* des points donnés le point d'abscisse $ac - bd$ et d'ordonnée $ad + bc$, de sorte que

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Il est aisé de prouver que les opérations ainsi définies sur les points du plan possèdent toutes les propriétés usuelles des opérations sur les nombres : l'addition et la multiplication des points du plan sont commutatives (on peut permuter les termes ou les facteurs), associatives (la somme et le produit de trois points ne dépendent pas de la place des parenthèses) et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Notons que l'associativité de l'addition et de la multiplication des points permet de définir d'une façon univoque la somme et le produit d'un nombre fini quelconque de points du plan.

Une fois définies l'addition et la multiplication, on peut effectuer sur les points du plan les opérations de soustraction et de division qui leur sont inverses, inverses en ce sens que, dans tout système de nombres, la différence de deux nombres est définie comme le nombre dont la somme avec le second terme est égale au premier, et le quotient de deux nombres comme le nombre dont le produit par le diviseur est égal au dividende. A savoir :

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

Le lecteur prouvera sans difficulté que le produit du point dans le second membre de la dernière égalité par le point (c, d), au sens de la définition donnée plus haut, est bien égal au point (a, b). Il est encore plus simple de voir que la somme du point dans le second membre de la première égalité et du point (c, d) est le point (a, b).

En appliquant nos définitions aux points de l'axe des abscisses, c'est-à-dire aux points de la forme $(a, 0)$, nous obtenons

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0),$$

ce qui montre que l'addition et la multiplication de ces points se réduisent respectivement à l'addition et à la multiplication de leurs abscisses. Il en est de même de la soustraction et de la division :

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0),$$

$$\left(\frac{a, 0}{b, 0}\right) = \left(\frac{a}{b}, 0\right).$$

Si nous convenons que tout point $(a, 0)$ de l'axe des abscisses représente le nombre a (son abscisse), donc si nous identifions le point $(a, 0)$ au nombre a, alors l'axe des abscisses deviendra droite numérique tout simplement. Nous pouvons maintenant dire que le nouveau système de nombres que nous avons construit à partir des points du plan contient, en particulier, tous les nombres réels, notamment comme points de l'axe des abscisses.

Quant aux points de l'axe des ordonnées, ils ne peuvent être identifiés aux nombres réels. Considérons, par exemple, le point $(0, 1)$ de l'axe des ordonnées, situé au-dessus du point O à la distance 1. Désignons ce point par la lettre i :

$$i = (0, 1)$$

et trouvons son carré au sens de la multiplication des points du plan :

$$i^2 = (0, 1)\ (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Le point $(-1, 0)$ n'appartient pas à l'axe des ordonnées, mais à celui des abscisses, et représente donc le nombre réel -1, tel que

$$i^2 = -1.$$

Nous avons donc trouvé dans notre nouveau système numérique un nombre dont le carré est égal au nombre réel -1, c'est-à-dire que nous sommes déjà en mesure d'extraire la racine carrée de -1. L'autre valeur de cette racine est le point $-i = (0, -1)$. Notons que le point $(0, 1)$ que nous avons désigné par i est un point bien déterminé du plan ; le fait que l'on l'appelle habituellement « unité imaginaire » ne l'empêche point d'exister réellement dans le plan.

Le système numérique ainsi construit, plus vaste que le système des nombres réels, s'appelle *système des nombres complexes*, et les points du plan eux-mêmes, avec les opérations définies plus haut, *nombres complexes*. Il est facile de montrer, en utilisant ces opérations, que tout nombre complexe s'exprime par des nombres réels et le nombre i. En effet, soit (a, b) un point. En vertu de la définition de l'addition, nous avons l'égalité

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

Le terme $(a, 0)$ est un point de l'axe des abscisses et est donc le nombre réel a. L'autre terme peut être mis, d'après la définition de la multiplication, sous la forme

$$(0, b) = (b, 0)\ (0, 1).$$

Le premier facteur dans le second membre est le nombre réel b, le deuxième vaut i. Ainsi l'on obtient

$$(a, b) = a + bi,$$

2—038

où l'addition et la multiplication sont comprises au sens des opérations sur les points du plan.

Avec cette notation habituelle, écrivons dans le cas des nombres complexes les formules des opérations définies plus haut :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i,$$

$$(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc+ad}{c^2+d^2}\, i.$$

Notons que la définition de la multiplication des points du plan que nous avons formulée plus haut est bien conforme à la loi distributive : en multipliant les facteurs dans le premier membre de la deuxième égalité d'après la règle qui résulte de cette loi, en utilisant ensuite l'égalité $i^2 = -1$ et en réduisant enfin les termes semblables, nous arrivons au second membre.

3. EXTRACTION DES RACINES. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Avec les nombres complexes, nous pouvons extraire la racine carrée non seulement du nombre -1, mais de n'importe quel nombre réel négatif ; nous aurons chaque fois deux valeurs différentes de la racine. A savoir, si $-a$ est un nombre réel négatif ($a > 0$), alors

$$\sqrt{-a} = \pm \sqrt{a}\, i,$$

où $\sqrt{a}$ est la valeur positive de la racine carrée du nombre réel positif a.

En revenant à l'équation du second degré à coefficients réels qu'on a vue dans l'introduction, on peut dire que, lorsque $b^2 - 4ac < 0$, cette équation possède deux racines distinctes, mais complexes.

Avec les nombres complexes on peut extraire les racines carrées non seulement d'un nombre réel, mais aussi de n'importe quel nombre complexe. Soit un nombre complexe de la forme $a + bi$, alors

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)},$$

où l'on choisit chaque fois la valeur positive du radical $\sqrt{a^2+b^2}$. Le lecteur voit sans peine que, quels que soient a et b, le premier terme du second membre et le coefficient de i sont les deux réels. Chacun de ces deux radicaux a deux valeurs que l'on associe d'après la règle suivante : si $b > 0$, on ajoute à la valeur positive de l'un des radicaux la valeur positive du second, et on fait de même avec les valeurs négatives ; si $b < 0$, la valeur positive de l'un des radicaux est à ajouter à la valeur négative du second.

● EXEMPLE. Extraire la racine carrée du nombre $21 - 20i$. On a

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{441+400} = 29,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}(21+29)} = \pm 5,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}(-21+29)} = \pm 2.$$

Comme $b = -20$, i.e. $b < 0$, on additionne les valeurs des deux derniers radicaux ayant les signes différents, c'est-à-dire

$$\sqrt{21-20i} = \pm(5-2i).$$

Une fois l'extraction de la racine carrée d'un nombre complexe étudiée, nous sommes en mesure de résoudre les équations du second degré à n'importe quels coefficients complexes. En effet, la formule obtenue pour les racines d'une telle équation reste valable pour le cas de coefficients complexes, et le calcul de la racine carrée qui figure dans cette formule

se réduit, comme on l'a vu, à l'extraction de la racine carrée de deux nombres réels positifs. L'équation du second degré à coefficients complexes quelconques possède donc deux racines qui peuvent, éventuellement, se confondre, c'est-à-dire représenter une racine multiple.

● EXEMPLE. Résoudre l'équation

$$x^2 - (4 - i)\,x + (5 - 5i) = 0.$$

En appliquant la formule usuelle nous avons

$$x = \frac{(4-i) \pm \sqrt{(4-i)^2 - 4\,(5-5i)}}{2} = \frac{(4-i) \pm \sqrt{-5+12i}}{2}.$$

L'extraction de la racine carrée d'après la méthode proposée plus haut donne

$$\sqrt{-5 + 12i} = \pm(2 + 3i),$$

d'où

$$x = \frac{(4-i) \pm (2+3i)}{2}.$$

Par conséquent, notre équation admet pour solutions:

$$x_1 = 3 + i, \; x_2 = 1 - 2i.$$

La vérification facile montre que les deux nombres satisfont à l'équation initiale.

Passons au problème d'extraction de la racine n-ième d'un nombre complexe, n étant n'importe quel nombre entier positif. On peut démontrer que, pour tout nombre complexe α, il existe exactement n nombres complexes différents deux à deux dont la puissance n-ième (i.e. le produit de n facteurs identiques égaux à un des nombres en question) est égale à α. En d'autres termes, le théorème suivant qui est d'une grande importance a lieu:

La racine n-ième de tout nombre complexe non nul a exactement n valeurs deux à deux différentes.

Ce théorème s'applique aussi bien aux nombres réels qui sont un cas particulier des nombres complexes: la racine n-ième d'un nombre réel a prend exactement n valeurs différentes qui sont, en général, complexes; on sait que, suivant le signe de a et la parité du nombre n, il y a entre elles deux valeurs réelles, ou une seule, ou aucune.

Ainsi, la racine cubique de l'unité a trois valeurs:

$$1, \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

on vérifie aisément que le cube de chacun de ces nombres vaut 1. Les valeurs de la racine quatrième de l'unité sont:

$$1, \quad -1, \quad i \text{ et } -i.$$

Nous avons donné plus haut la formule pour la racine carrée d'un nombre complexe $a + bi$. L'opération se réduit à l'extraction des racines carrées de deux nombres réels positifs. Malheureusement, pour $n > 2$ il n'existe aucune formule exprimant la racine n-ième d'un nombre complexe $a + bi$ par des valeurs réelles des radicaux de quelques nombres réels; il est démontré qu'une telle formule ne peut être obtenue. Habituellement, on extrait des racines n-ièmes de nombres complexes en passant à une nouvelle forme de notation de ces nombres, dite *trigonométrique*. Ici on ne considère pas ce problème.

4. ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

Nous connaissons la formule des solutions d'une équation du second degré qui est valable même pour les coefficients complexes. Il s'avère que, pour les équations du troisième degré (on dit aussi cubiques), on peut également indiquer une formule, naturellement plus compliquée, qui exprime les racines de l'équation par ses coefficients à l'aide de radi-

caux; cette formule est valable pour les équations à coefficients complexes quelconques.

Soit une équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Transformons-la en posant

$$x = y - \frac{a}{3},$$

où y est la nouvelle inconnue. En portant cette expression dans notre équation nous arrivons à une équation cubique plus simple par rapport à l'inconnue y. Dans cette nouvelle équation le coefficient devant y^2 est nul. Le coefficient de y et le terme libre sont respectivement

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c,$$

et l'équation s'écrit

$$y^3 + py + q = 0.$$

Si nous trouvons les racines de cette nouvelle équation, alors en y retranchant $\frac{a}{3}$ nous aurons les racines de l'équation initiale.

Les racines de la nouvelle équation s'expriment par ses coefficients à l'aide de la formule:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Chacun des radicaux cubiques ci-dessus a, nous le savons, trois valeurs. Mais il ne faut pas les associer n'importe comment. Il s'avère que, pour toute valeur du premier radical, on peut indiquer une seule valeur du deuxième telle que leur produit vaut $-\frac{p}{3}$. C'est justement deux valeurs de ce genre que l'on doit additionner pour obtenir une racine de l'équation. Nous aurons ainsi trois racines de notre équation. Toute équation cubique, à coefficients numériques quel-

conques, possède donc trois racines, en général complexes; naturellement, certaines d'elles peuvent se confondre, c'est-à-dire fournir une racine multiple.

La valeur pratique de la formule indiquée est bien faible. En effet, supposons que les coefficients p et q soient réels. On peut montrer que si l'équation

$$y^3 + py + q = 0$$

admet trois racines réelles différentes, alors l'expression

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

est négative. Elle figure dans la formule sous le signe du radical carré, donc, après extraction des racines, nous aurons un nombre complexe sous chacun des radicaux cubiques. Nous avons dit plus haut que l'extraction de la racine cubique d'un nombre complexe exige le passage à la notation trigonométrique, ce qui ne se fait qu'approximativement, à l'aide de tables.

● EXEMPLE. Soit l'équation

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

Comme elle ne contient pas de carré de l'inconnue, on peut lui appliquer directement la formule signalée plus haut. Ici

$$p = -19, \; q = 30,$$

alors l'expression

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{784}{27}$$

a une valeur négative. Le premier radical cubique figurant dans la formule s'écrit

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{-\frac{784}{27}}} =$$

$$= \sqrt[3]{-15 + i\sqrt{\frac{784}{27}}}.$$

Nous ne pouvons pas exprimer ce radical cubique par des radicaux de nombres réels, donc il est impossible de trouver les racines de notre équation à l'aide de la formule. Or, la vérification directe montre que ses racines sont les nombres entiers 2, 3 et —5.

La formule mentionnée pour les racines d'une équation cubique ne fonctionne pratiquement que dans les cas où l'expression $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est positive ou nulle. Dans le premier cas l'équation possède une racine réelle et deux complexes, dans le second, trois racines réelles dont deux se confondent donnant une racine multiple.

● EXEMPLE. Résoudre l'équation cubique

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0.$$

En posant

$$x = y + 3$$

nous obtenons l'équation « réduite »

$$y^3 + 9y - 26 = 0$$

à laquelle on peut appliquer la formule. Ici

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=196=14^2,$$

donc

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{13+14}=\sqrt[3]{27}.$$

L'une des valeurs de ce radical cubique est le nombre 3. Le produit de cette valeur par la valeur convenable du deuxième radical cubique figurant dans la formule est égal, comme nous avons vu, à $-\frac{p}{3}$, donc à—3 dans notre cas. La valeur cherchée du deuxième radical est, par conséquent, le nombre —1. Pour cette raison, l'une des racines de l'équa-

tion réduite est

$$y_1 = 3 + (-1) = 2.$$

Sachant l'une des racines de l'équation cubique, on peut obtenir deux autres par plusieurs méthodes. On peut, par exemple, trouver deux autres valeurs du radical $\sqrt[3]{27}$, puis calculer les valeurs qui leur correspondent du deuxième radical et additionner les valeurs correspondantes des deux radicaux. On peut procéder autrement, à savoir diviser le premier membre de l'équation réduite par $y - 2$, après quoi il ne reste qu'à résoudre une équation carrée. Par l'une ou l'autre de ces méthodes nous obtiendrons que les deux autres racines de notre équation réduite sont

$$-1 + i\sqrt{12} \text{ et } -1 - i\sqrt{12}.$$

Par conséquent, les racines de l'équation cubique initiale sont

$$5, \ 2 + i\sqrt{12} \text{ et } 2 - i\sqrt{12}.$$

Il est clair que ce n'est pas toujours, et de loin, que les radicaux se calculent si facilement que dans l'exemple considéré qui est d'ailleurs spécialement choisi. Dans la majorité des cas on doit se contenter des calculs approximatifs, donc n'obtenir que des solutions approchées d'une équation.

5. SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS EN RADICAUX ET SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS

Pour les équations du quatrième degré, on peut aussi indiquer une formule qui exprime leurs racines par leurs coefficients. Cette formule est beaucoup plus compliquée que celle de l'équation du troisième degré; elle contient des radicaux plus encombrants ce qui diminue sa valeur pratique. Néanmoins, on peut en tirer la conclusion que toute équa-

tion du quatrième degré à coefficients numériques quelconques possède quatre racines complexes dont certaines peuvent être réelles.

Les formules pour les solutions des équations du troisième et du quatrième degré étaient déjà trouvées dans le XVIe siècle. En même temps commencent les recherches des formules donnant les solutions d'une équation du cinquième degré ou plus. Notons que la forme générale d'une équation du n-ième degré où n est un entier positif est :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Les recherches duraient jusqu'au début du XIXe siècle, lorsqu'on a enfin établi le résultat remarquable que voici :

Quel que soit n supérieur ou égal à cinq, il est impossible d'indiquer une formule qui exprime les racines de toute équation du n-ième degré par ses coefficients à l'aide de radicaux.

Qui plus est, pour tout n supérieur ou égal à cinq, on peut indiquer une équation du n-ième degré à coefficients *entiers* dont les racines ne s'expriment pas par des radicaux aussi compliqués soient-ils, à condition d'utiliser sous les radicaux seuls les nombres entiers et fractionnaires. Telle est, par exemple, l'équation

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

On peut démontrer qu'elle a cinq racines dont trois réelles et deux complexes, mais qu'aucune d'elles ne s'exprime en radicaux, c'est-à-dire que cette équation est « irrésoluble en radicaux ». Ainsi, l'ensemble des nombres, réels ou complexes, susceptibles d'être racines des équations à coefficients entiers (de tels nombres sont dits *algébriques*, contrairement aux nombres *transcendants* qui ne sont racines d'aucune équation à coefficients entiers) est beaucoup plus vaste que celui des nombres s'exprimant en radicaux.

La théorie des nombres algébriques est une branche importante de l'algèbre ; les mathématiciens russes dont E. Zolotarev (1847-1878), G. Voronoï (1868-

(1908), N. Tchébotarev (1894-1947) y ont beaucoup apporté.

La démonstration de l'impossibilité d'une formule générale pour la résolution en radicaux des équations du n-ième degré, avec $n \geqslant 5$, a été trouvée par N. Abel (1802-1829). L'existence des équations à coefficients entiers qui sont irrésolubles en radicaux a été établie par E. Galois (1811-1832) ; il a également trouvé certaines conditions dans lesquelles une équation est résoluble en radicaux. Pour établir tous ces résultats il fallait créer une nouvelle théorie fondamentale, à savoir la *théorie des groupes*. La notion de groupe a permis d'épuiser le problème d'existence de solutions en radicaux des équations, et plus tard elle a trouvé de nombreuses autres applications dans plusieurs domaines des mathématiques et même en dehors des mathématiques. Cette notion est devenue l'un des plus importants objets d'études en algèbre. Nous ne définissons pas ici cette notion, notons seulement que, dans le développement de la théorie des groupes, le premier rôle appartient actuellement aux algébristes soviétiques.

L'absence de formules pour la résolution des équations du n-ième degré ($n \geqslant 5$) ne conduit à aucune difficulté sérieuse, lorsqu'il s'agit de la recherche pratique des racines. Elle est bien compensée par de nombreuses méthodes approchées qui, même en cas d'équations cubiques, mènent au but beaucoup plus rapidement que l'application de la formule (lorsqu'elle est applicable) et l'extraction approchée de racines des nombres réels. Pourtant, l'existence des formules pour les équations du second, troisième et quatrième degré a permis de démontrer qu'elles possèdent deux, trois et quatre racines respectivement. Qu'est-ce qu'on peut donc dire sur l'existence de racines des équations du n-ième degré, pour n arbitraire?

S'il existait une équation à coefficients numériques, réels ou complexes, qui n'ait aucune racine réelle ni complexe, alors le problème d'élargissement de l'ensemble de nombres se poserait encore une fois. Il s'avère qu'on n'en a pas besoin : les

nombres complexes suffisent à eux seuls pour résoudre n'importe quelle équation à coefficients numériques. Notamment, le théorème suivant a lieu:

Toute équation du n-ième degré, à n'importe quels coefficients numériques, possède n racines complexes ou, en particulier, réelles; certaines de ces racines peuvent éventuellement se confondre, donc être multiples.

Ce théorème s'appelle *théorème fondamental de l'algèbre supérieure.* Il a éte démontré par d'Alembert (1717-1783) et Gauss (1777-1855) déjà dans le XVIIIe siècle, mais est seulement dans le XIXe siècle que les démonstrations sont devenues parfaitement rigoureuses; actuellement, il existe plusieurs dizaines de démonstrations variées de ce théorème.

La notion de multiplicité d'une racine, qui est mentionnée dans l'énoncé du théorème fondamental, a le sens suivant. On peut démontrer que si une équation du n-ième degré

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

a n racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alors le premier membre peut être factorisé comme suit:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Inversement, si le premier membre d'une équation se factorise comme ci-dessus, alors les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des racines de l'équation. Il peut arriver qu'il y ait, parmi les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ceux qui se confondent. Si, par exemple,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k,$$

mais

$$\alpha_1 \neq \alpha_l \quad \text{pour } l = k+1, k+2, \ldots, n,$$

c'est-à-dire que le facteur $x - \alpha_1$ se répète k fois dans la factorisation, alors pour $k > 1$ la racine α_1 est dite *multiple d'ordre de multiplicité k.*

6. NOMBRE DE RACINES RÉELLES

Le théorème fondamental de l'algèbre supérieure trouve des applications essentielles dans bien des problèmes théoriques, mais ne fournit aucune méthode pratique de la recherche de racines d'une équation. Or, beaucoup de questions techniques amènent à telle ou telle équation, souvent à coefficients réels, et il s'agit d'avoir quelques renseignements sur ses racines. Normalement, on ne tient pas à connaître les valeurs exactes des racines, puisque les coefficients même de l'équation sont obtenus approximativement.

Soit une équation du n-ième degré

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

à coefficients réels. Elle admet, nous le savons, n racines. Les premières questions qui se posent naturellement sont : y a-t-il, parmi les racines, des réelles, combien sont-elles, où sont-elles disposées, à peu près ? Les réponses peuvent être obtenues de la façon suivante. Désignons par $f(x)$ le polynôme dans le premier membre de l'équation :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Cette écriture traduit le fait que nous considérons le premier membre de l'équation en tant que *fonction* de la variable x. En donnant à x une valeur numérique quelconque α, en la portant dans l'expression de $f(x)$ et en effectuant toutes les opérations indiquées, nous arrivons à un nombre qui s'appelle *valeur* du polynôme $f(x)$ et se désigne par $f(\alpha)$. Ainsi, lorsque

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

et que $\alpha = 2$, on a

$$f(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 1 = -7.$$

Construisons le graphique du polynôme $f(x)$. Pour le faire, traçons les axes des coordonnées dans le plan; se donnant une valeur α de x, calculons la valeur correspondante $f(\alpha)$ du polynôme $f(x)$, marquons sur le plan le point d'abscisse α et d'ordonnée $f(\alpha)$, i.e. le point $(\alpha, f(\alpha))$. Si l'on pouvait réaliser ce procédé pour tous les α, alors les points marqués sur le plan formeraient une courbe. Les points d'intersection ou de tangence de cette courbe avec l'axe des abscisses indiquent les valeurs de α pour lesquelles $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire les racines réelles de l'équation donnée.

Malheureusement, nous ne sommes pas en mesure de trouver les points $(\alpha, f(\alpha))$ pour toutes les valeurs de α qui sont infinité, nous sommes donc forcés de nous borner à un nombre fini de ces points. Pour simplifier, on peut d'abord prendre quelques valeurs entières successives de α, positives et négatives, marquer sur le plan les points correspondants, puis mener par ces points une courbe aussi lisse que possible. Il s'avère qu'on peut se borner à des valeurs de α comprises entre $-B$ et B où la borne B est déterminée comme suit: si $|a_0|$ est la valeur absolue du coefficient de x^n (rappelons que $|a| = a$ pour $a \geqslant 0$ et $|a| = -a$ pour $a < 0$) et A est la plus grande des valeurs absolues de tous les autres coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, alors

$$B = \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

On peut se rendre compte d'ailleurs, que souvent les bornes indiquées sont trop larges.

● EXEMPLE. Construire le graphique du polynôme

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1.$$

Ici $|a_0| = 1$, $A = 5$, donc $B = 6$. En fait, on peut se borner dans cet exemple aux valeurs de α situées entre -1

et 5. Dressons la table des valeurs du polynôme $f(x)$ et traçons son graphique (fig. 3):

α	-1	0	1	2	3	4	5
$f(\alpha)$	-7	1	-1	-7	-11	-7	11

Le graphique montre que toutes les trois racines α_1, α_2 et α_3 de notre équation sont réelles et qu'elles sont comprises dans les intervalles

$$-1 < \alpha_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < 1, \quad 4 < \alpha_3 < 5.$$

Remarquons qu'on peut bien se passer de la construction du graphique: ses intersections avec l'axe des abscisses sont disposées chacune entre les valeurs voisines de α pour lesquelles les valeurs de $f(\alpha)$ sont de signe contraire; il suffit donc de consulter la table.

Si nous avions trouvé, dans le présent exemple, non pas trois points d'intersection du graphique avec l'axe des abscisses, mais moins, alors certains doutes pourraient bien surgir: n'avons-nous pas perdu, à cause de l'imperfection de notre construction, quelques racines de l'équation, puisque nous avons tracé la courbe d'après sept points seulement? Notons qu'il existe des méthodes permettant de connaître le nombre exact de racines réelles d'une équation, même des racines réelles comprises entre n'importe quels deux nombres donnés a et b où $a < b$. Nous n'exposons pas ces méthodes.

Les théorèmes suivants s'avèrent parfois utiles qui fournissent certains renseignements sur l'existence de racines réelles ou même positives.

Toute équation à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Si, dans une équation à coefficients réels, le coefficient dominant a_0 et le terme libre a_n sont de signes opposés, alors

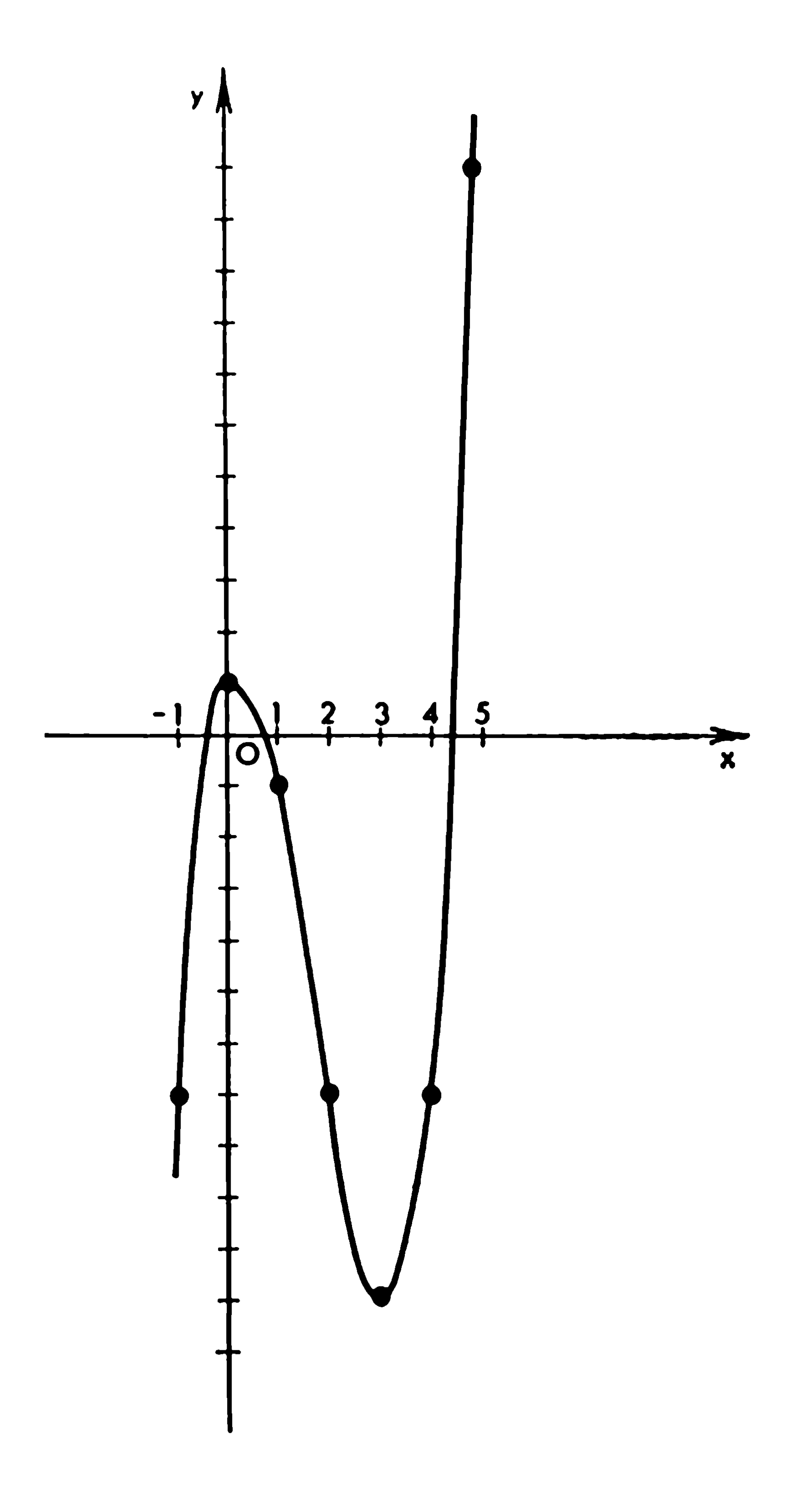


Fig. 3

l'équation possède au moins une racine positive. Si, de plus, l'équation est de degré pair, elle possède également au moins une racine négative.

Ainsi, l'équation

$$x^7 - 8x^3 + x - 2 = 0$$

admet au moins une racine positive, et l'équation

$$x^6 + 2x^5 - x^2 + 7x - 1 = 0$$

possède entre autres une racine positive et une négative. Tout cela se vérifie aisément à l'aide de graphiques.

7. RÉSOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATIONS

Plus haut, nous avons trouvé les nombres entiers voisins entre lesquels sont disposées les racines réelles de l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0.$$

La méthode que nous avons appliquée permet de préciser les valeurs des racines. Proposons-nous, par exemple, de situer plus précisément la racine α_2 qui se trouve entre 0 et 1. En calculant les valeurs de $f(x)$ de notre équation pour $x = 0{,}1$; $0{,}2$;. . . ; $0{,}9$ nous voyons entre lesquelles de ces valeurs successives de x le graphique du polynôme $f(x)$ coupe l'axe des abscisses. C'est-à-dire que nous calculons la racine α_2 à un dixième près.

En continuant de la même manière on pourrait trouver la valeur de la racine α_2 à un centième, à un millième près, et, en principe, à une précision voulue. Ce procédé est pourtant lié à des calculs encombrants qui deviennent très vite pratiquement irréalisables. C'est pourquoi plusieurs méthodes sont élaborées afin de calculer plus rapidement les valeurs approchées de racines réelles des équations. Nous allons en exposer la plus simple que nous appliquerons tout de suite

au calcul de la racine α_2 de l'équation cubique considérée. Il est bon de trouver préalablement un intervalle qui contienne cette racine et qui soit plus étroit que celui que nous connaissons pour le moment: $0 < \alpha_2 < 1$. Pour le faire, calculons notre racine à un dixième près. Si le lecteur calcule les valeurs du polynôme

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

pour $x = 0,1$; $0,2$; . . . ; $0,9$, il trouvera

$$f(0,7) = 0,293, \quad f(0,8) = -0,088.$$

Par conséquent, les valeurs étant de signes contraires, on a:

$$0,7 < \alpha_2 < 0,8.$$

Voici la méthode. Soit une équation de degré n dont nous désignons le premier membre par $f(x)$, et supposons qu'entre a et b, où $a < b$, il y a une racine réelle simple α de cette équation. Si les limites $a < \alpha < b$ sont déjà assez étroites, alors on peut trouver, d'après certaines formules, les nouvelles limites c et d pour la racine α qui soient beaucoup plus étroites, c'est-à-dire qu'elles déterminent beaucoup plus précisément la position de la racine; on aura $c < \alpha < d$ ou bien $d < \alpha < c$.

Le nombre c se détermine à l'aide de la formule

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}.$$

Dans notre exemple, $a = 0,7$, $b = 0,8$ et nous avons trouvé $f(a) = 0,293$ et $f(b) = -0,088$. Donc

$$c = \frac{0,8 \cdot 0,293 - 0,7 \cdot (-0,088)}{0,293 - (-0,088)} = \frac{0,2344 + 0,0616}{0,381} = 0,7769\ \ldots$$

La formule pour le nombre d demande une nouvelle notion qui ne jouera ici qu'un rôle auxiliaire; en fait, elle se rapporte à une autre branche des mathématiques, à savoir au *calcul différentiel*.

Soit un polynôme de degré n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

Appelons *dérivée* de ce polynôme et désignons par $f'(x)$ le polynôme suivant de degré $n - 1$:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \\ + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Il s'obtient à partir du polynôme $f(x)$ d'après la règle suivante: chaque terme a_kx^{n-k} du polynôme $f(x)$ est multiplié par l'exposant $n - k$ de x tandis que cet exposant lui-même diminue d'une unité; naturellement, le terme libre a_n disparaît, car on peut dire que $a_n = a_nx^0$.

On peut également trouver la dérivée du polynôme $f'(x)$. Ce sera un polynôme de degré $n - 2$ qui s'appelle *dérivée seconde* du polynôme $f(x)$ et se désigne $f''(x)$.

Ainsi, pour le polynôme primitif

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

on a

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2,$$
$$f''(x) = 6x - 10.$$

Pour calculer d nous avons les formules suivantes:

$$d = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad d = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

La formule à utiliser se choisit comme suit. Si les limites a, b sont suffisamment étroites, la dérivée seconde $f''(x)$ a, normalement, un même signe pour $x = a$ et $x = b$, tandis que $f(a)$ et $f(b)$ sont, nous l'avons vu, de signes contraires. Si les signes de $f''(a)$ et $f(a)$ coïncident, on doit choisir la première formule pour d, c'est-à-dire celle qui contient le nombre a; si ce sont les signes de $f''(b)$ et $f(b)$ qui coïncident, on doit préférer la deuxième formule contenant le nombre b.

Dans notre exemple, la dérivée seconde $f''(x)$ est négative pour $a = 0{,}7$ de même que pour $b = 0{,}8$. Par conséquent, $f(a)$ étant positif et $f(b)$ négatif, on choisit la deuxième formule pour d. Comme

$$f'(0{,}8) = -4{,}08,$$

on a

$$d = 0{,}8 - \frac{-0{,}088}{-4{,}08} = 0{,}8 - 0{,}0215\ldots = 0{,}7784\ldots$$

Ainsi, nous avons trouvé pour la racine α_2 les limites beaucoup plus étroites qu'avant:

$$0{,}7769\ldots < \alpha_2 < 0{,}7784\ldots$$

ou bien, en passant à un intervalle un peu plus grand:

$$0{,}7769 < \alpha_2 < 0{,}7785.$$

Il en résulte que, si nous choisissons pour α_2 le milieu de cet intervalle, c'est-à-dire la demi-somme des limites trouvées

$$\alpha_2 = 0{,}7777,$$

nous commettons une erreur qui ne dépasse pas le nombre 0,0008 égal à la demi-différence des limites.

Si la précision obtenue n'est pas suffisante, on peut appliquer la méthode exposée aux nouvelles limites de la racine α_2. Notons seulement que dans ce cas les calculs sont beaucoup plus compliqués.

Il existe d'autres méthodes, plus exactes, de la résolution approchée d'équations. L'une des plus parfaites, qui permet de calculer les valeurs approchées non seulement des racines réelles mais aussi bien complexes, est la méthode proposée par le grand mathématicien russe, créateur de la géométrie non euclidienne, N. Lobatchevski (1793-1856).

8. CORPS

Le problème d'existence des racines d'une équation algébrique que nous avons déjà discuté plus haut peut être con-

sidéré d'un point de vue plus général. Pour le faire, il faut introduire une nouvelle notion qui est l'une des plus importantes dans l'algèbre.

Considérons d'abord les trois systèmes suivants de nombres: l'ensemble de tous les nombres rationnels, celui de tous les nombres réels et celui de tous les nombres complexes. Dans chacun de ces systèmes numériques on peut effectuer, sans en sortir, l'addition, la multiplication, la soustraction et la division (sauf par zéro). C'est par cela qu'ils diffèrent du système de tous les nombres entiers où la division n'est pas toujours réalisable (on ne peut, par exemple, diviser le nombre 2 par le nombre 5), ainsi que de celui de tous les nombres réels positifs où n'est pas toujours réalisable la soustraction.

Le lecteur a déjà vu les cas où les opérations algébriques s'effectuent sur les objets autres que les nombres: rappelons l'addition et la multiplication des polynômes, l'addition des forces en physique. D'ailleurs, en définissant les nombres complexes nous avons considéré l'addition et la multiplication des points du plan.

D'une façon générale, soit P un ensemble. On appelle *éléments* de l'ensemble P les objets dont il est formé que ce soient les nombres, les objets de nature géométrique, ou, en général, les objets de nature quelconque. On dit que les opérations d'addition et de multiplication sont définies sur P, lorsque, à tout couple a, b d'éléments de P, il correspond un élément bien déterminé c de P appelé leur *somme*:

$$c = a + b$$

et un élément bien déterminé d appelé leur *produit*:

$$d = ab.$$

L'ensemble P muni des opérations d'addition et de multiplication s'appelle *corps*, si ces opérations possèdent les propriétés I à V suivantes.

I. Les deux opérations sont commutatives, i.e., quels que soient a et b, on a

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

II. Les deux opérations sont associatives, i.e., quels que soient a, b et c, on a

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab) c = a (bc).$$

III. La multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire que

$$a (b + c) = ab + ac,$$

quels que soient a, b et c.

IV. La soustraction est réalisable, c'est-à-dire que, quels que soient a et b, on peut trouver dans P une racine, et une seule, de l'équation

$$a + x = b.$$

V. La division est réalisable, c'est-à-dire que, quels que soient a et b, à condition que a ne soit pas zéro, on peut trouver dans P une racine, et une seule, de l'équation

$$ax = b.$$

Dans la condition V on mentionne zéro. Son existence découle des conditions I à IV. En effet, si a est un élément quelconque de P, alors, en vertu de IV, il existe dans P un élément bien déterminé qui satisfait à l'équation

$$a + x = a$$

(c'est a lui-même qu'on choisit pour b). Cet élément dépendant, peut-être, du choix de l'élément a, nous le désignerons par 0_a, c'est-à-dire que

$$a + 0_a = a. \tag{1}$$

Soit b un autre élément de P ; on trouve encore un élément, et un seul, 0_b tel que

$$b + 0_b = b. \tag{2}$$

Si nous démontrons que $0_a = 0_b$ pour n'importe quels a et b, alors l'existence dans l'ensemble P d'un élément qui joue le rôle de zéro pour tout élément a de P sera démontrée.

Soit c une racine de l'équation

$$a + x = b$$

qui existe en vertu de la condition IV; on a donc

$$a + c = b.$$

Ajoutons à deux membres de l'égalité (1) l'élément c ce qui ne viole pas l'égalité, vu l'unicité de la somme:

$$(a + 0_a) + c = a + c.$$

Le second membre vaut b, le premier $b + 0_a$ en vertu des conditions I et II. Ainsi, on a

$$b + 0_a = b.$$

En comparant ceci et l'égalité (2) et compte tenu du fait que la solution de l'équation $b + x = b$ est unique d'après IV, nous aboutissons à l'égalité

$$0_a = 0_b.$$

Il est donc démontré que, dans tout corps P, il existe un *zéro*, i.e. un élément 0 tel que l'égalité

$$a + 0 = a$$

a lieu pour *tous les a* de P. Par conséquent, l'énoncé de la condition V acquiert un sens.

Nous connaissons déjà trois exemples de corps, notamment le corps des nombres rationnels, celui des nombres réels et celui des nombres complexes, tandis que l'ensemble des nombres entiers ou celui des nombres réels positifs ne sont pas des corps. En plus de trois exemples cités, il existe une infinité d'autres corps. En particulier, le corps des nombres réels, tout comme celui des nombres complexes, en comprennent beaucoup; ce sont des *corps numériques*. D'autre part,

il existe des corps plus vastes que celui des nombres complexes. Leurs éléments ne sont plus des nombres, ce qui n'empêche pas à les utiliser dans des recherches mathématiques. Signalons un exemple.

Considérons tous les polynômes possibles

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

à coefficients complexes quelconques et de n'importe quel degré; en particulier, les polynômes de degré nul sont les nombres complexes. En admettant que l'addition, la soustraction et la multiplication des polynômes à coefficients complexes se font d'après les mêmes règles que celles définies pour les polynômes à coefficients réels, nous n'obtenons pas encore un corps, puisque la division d'un polynôme par un autre ne donne pas toujours un polynôme.

Allons donc considérer les rapports de polynômes

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

où, comme on dit, les *fonctions rationnelles* à coefficients complexes, et convenons d'opérer sur elles comme sur les fractions. A savoir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

si, et seulement si,

$$f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x).$$

Ensuite

$$\frac{f(x)}{g(x)} \pm \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) \pm g(x)u(x)}{g(x)v(x)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}.$$

Le rôle de zéro est joué par les fractions dont le numérateur est nul, c'est-à-dire par les fractions de la forme

$$\frac{0}{g(x)};$$

évidemment, toutes ces fractions sont égales. Enfin, si une fraction $\frac{u(x)}{v(x)}$ n'est pas nulle, i.e. $u(x) \neq 0$, alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} : \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)\,v(x)}{g(x)\,u(x)}.$$

On prouvera aisément que toutes les opérations décrites sur les fonctions rationnelles satisfont à toutes les conditions figurant dans la définition d'un corps, on peut donc parler du *corps des fonctions rationnelles* à coefficients complexes. Ce corps contient tout le corps des nombres complexes, car une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré nul est un nombre complexe tout simplement, et chaque nombre complexe peut être mis sous cette forme.

Il ne faut pas croire que tout corps ou bien est contenu dans le corps des nombres complexes, ou bien le contient; il existe d'autres corps, en particulier ceux qui sont formés d'un nombre fini d'éléments.

Partout où l'on utilise un corps, on a besoin de considérer les équations à coefficients de ce corps, il surgit donc le problème d'existence de racines de pareilles équations. Ainsi, dans certains problèmes géométriques, on a affaire à des équations à coefficients du corps des fonctions rationnelles; leurs racines sont appelées *fonctions algébriques*. Le théorème fondamental de l'algèbre qui se rapporte aux équations à coefficients numériques, n'a plus de valeur en cas d'équation à coefficients d'un corps quelconque, il est alors remplacé par les théorèmes généraux que voici.

Soient P un corps et

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

une équation de degré n à coefficients de ce corps. Il s'avère que cette équation ne peut avoir plus que n racines dans le corps P ni dans un corps plus vaste. Qui plus est, on peut élargir le corps P de façon à obtenir un corps Q dans lequel

notre équation possède déjà exactement n racines (certaines d'elles peuvent être multiples). On peut même énoncer le théorème suivant:

Tout corps P peut être élargi jusqu'à un corps $\overline{P}$ tel que toute équation à coefficients du corps P, et même toute équation à coefficients de $\overline{P}$, possède des racines dans $\overline{P}$, le nombre de racines étant égal au degré de l'équation.

Le corps $\overline{P}$ dont il s'agit dans l'énoncé du théorème est dit *algébriquement fermé*. Le théorème fondamental de l'algèbre montre que le corps des nombres complexes en est un exemple.

CONCLUSION

Nous avons considéré les équations de degré quelconque à une inconnue. Les sources de cette théorie sont dans l'algèbre élémentaire où, après avoir étudié les équations du premier degré, on passe à celles du second degré. Or, dans l'algèbre élémentaire, on fait un pas important dans une autre direction: d'une équation du premier degré à une inconnue on passe au système de deux équations du premier degré à deux inconnues, puis au système de trois équations à trois inconnues. On développe cette branche dans le cours d'algèbre supérieure. On y étudie des méthodes de résolution de n'importe quel système de n équations du premier degré à n inconnues, ainsi que de systèmes dont le nombre d'équations et celui d'inconnues sont différents. La théorie des systèmes d'équations du premier degré et quelques théories qui y sont liées, par exemple la *théorie des matrices*, constituent une branche spéciale de l'algèbre, à savoir l'*algèbre linéaire*; c'est la plus importante partie de l'algèbre en ce qui concerne ses applications dans la géométrie et dans d'autres domaines des mathématiques, sans parler de la physique et la mécanique rationnelle.

D'ailleurs, la théorie d'équations algébriques et l'algèbre linéaire représentent actuellement les parties plus ou moins

achevées de la science. Les besoins des mathématiques et de la physique ont conduit à une situation où la première place est occupée par l'étude d'ensembles sur lesquels certaines opérations algébriques sont données. A côté de la *théorie des corps* dont font partie la théorie des nombres algébriques et celle des fonctions algébriques, on développe, à l'heure actuelle, la *théorie des anneaux*. On appelle *anneau* un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication vérifiant les conditions I à IV qui figurent dans la définition d'un corps; l'ensemble de tous les nombres entiers en est un exemple. Nous avons déjà mentionné une autre branche importante de l'algèbre, notamment la *théorie des groupes*. Un *groupe* est un ensemble muni d'une seule opération algébrique, la multiplication. Cette opération doit être associative, et la division doit être réalisable.

Il est intéressant de remarquer que, dans un nombre important d'applications, on rencontre des opérations algébriques *non commutatives* (la permutation des facteurs change le produit) et parfois, de plus, *non associatives* (le produit de trois facteurs dépend de la disposition de parenthèses). Notamment, les groupes qu'on utilise dans le problème de solution des équations en radicaux sont non commutatives.

En conclusion, signalons à l'intention du lecteur intéressé le manuel de A. Kurosh, *Cours d'algèbre supérieure* (Editions Mir, 1971), où il trouvera un exposé systématique des éléments de la théorie des équations algébriques et de l'algèbre linéaire.

G. Chilov

Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles

AVANT-PROPOS

Les notions de dérivée et de primitive sont fondamentales dans l'analyse. Ce ne sont point des notions élémentaires; dans tout cours systématique d'analyse à leur introduction précède l'exposé de la théorie des nombres réels, de la théorie des limites et des fonctions continues, afin de pouvoir définir ces notions sous une forme assez générale et de permettre leur application à une classe de fonctions aussi large que possible.

Toutefois, si l'on se borne à une classe relativement restreinte des fonctions rationnelles et que l'on emploie le beau et suggestif langage des graphiques, on peut raconter sur la dérivée et la primitive pas mal de choses, ceci avec assez de rigueur et avec une foule d'exemples.

Nous nous adressons principalement aux élèves des classes terminales. Leurs connaissances en mathématiques suffisent pour bien comprendre le contenu du présent fascicule.

G. Chilov

1. LES GRAPHIQUES

Il est difficile d'imaginer une branche de la science ou de la vie sociale où l'on n'emploie pas les graphiques. Des phénomènes naturels, par exemple, tels que variations de la température, de la pression atmosphérique, etc. peuvent être très bien représentés à l'aide de graphiques. La construction d'un graphique de ce genre se fait sans trop de peine, pourvu qu'on dispose d'une table des valeurs. Ici on parlera des graphiques d'un autre type, à savoir de ceux qu'il faut tracer d'après telle ou telle formule mathématique. On en a besoin dans les domaines de la connaissance les plus divers. Ainsi, par exemple, en analysant théoriquement un processus physique un chercheur obtient une formule pour la grandeur qui l'intéresse. Le graphique construit d'après cette formule représente d'une façon suggestive le déroulement du futur processus. La vue même de ce graphique suggère souvent au chercheur une amélioration considérable de l'expérience.

Nous allons discuter ici quelques méthodes simples de construction des graphiques d'après les formules données.

Traçons sur le plan deux droites orthogonales, l'une horizontale, l'autre verticale, et désignons par O le point d'intersection. Il est d'usage d'appeler la droite horizontale *axe des abscisses*, et la verticale, *axe des ordonnées*. Par le point O chacun des axes est partagé en deux demi-axes, positif et négatif. Il est convenu de considérer comme positifs le demi-axe droit de l'axe des abscisses et le demi-axe supérieur de l'axe des ordonnées, les demi-axes qui restent étant négatifs. Indiquons par des flèches la direction positive. La position de tout point M sur le plan peut maintenant être déterminée par un couple de nombres. Pour le faire, menons du point M les perpendiculaires à chacun des axes; ces perpendiculaires découpent sur les axes les segments OA et OB (fig. 1). La mesure algébrique x du segment OA, positive si A se trouve sur le demi-axe positif et néga-

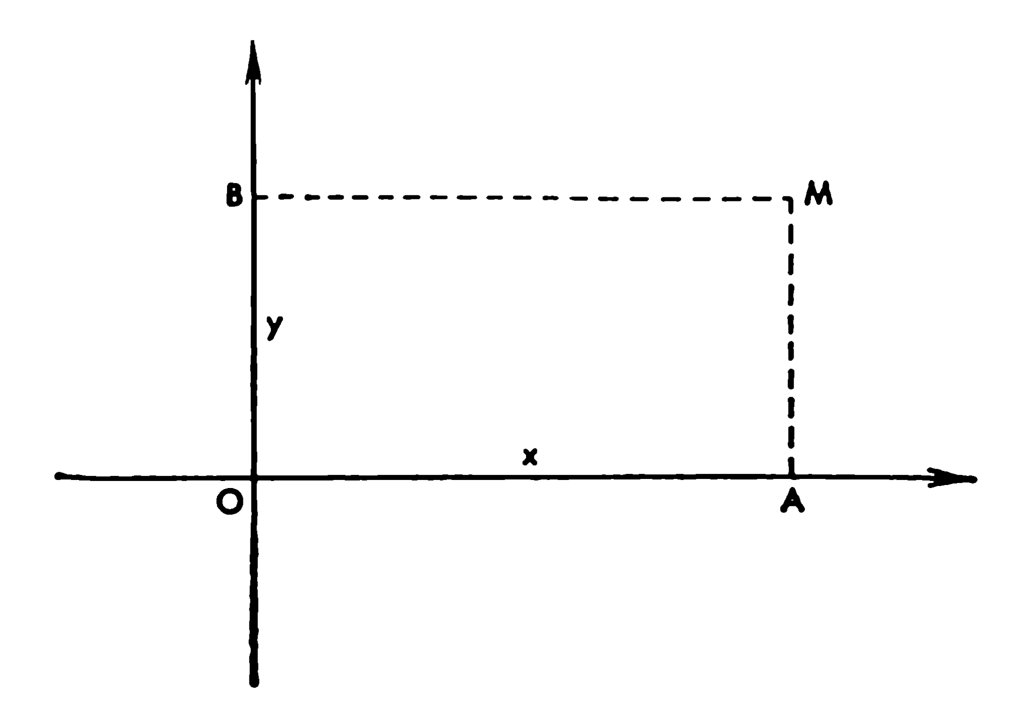


Fig. 1

tive si A est sur le demi-axe négatif, s'appelle *abscisse* du point M. De même, la mesure algébrique y du segment OB (prise avec le signe respectif) s'appelle *ordonnée* du point M. Les deux nombres x et y s'appellent *coordonnées* du point M. Tout point du plan a ses coordonnées. Les points de l'axe des abscisses ont l'ordonnée nulle, ceux de l'axe des ordonnées ont l'abscisse nulle. L'origine des coordonnées O (point d'intersection des axes) a les deux coordonnées nulles. Inversement, étant donnés deux nombres quelconques x et y, on peut toujours construire un (et un seul, ce qui est important) point M ayant x pour abscisse et y pour ordonnée; à cette fin, on marque sur l'axe des abscisses le point A tel que $OA = x$ et l'on élève de A la perpendiculaire $AM = y$ (compte tenu des signes); le point M est le point cherché.

Soit à construire le graphique correspondant à une formule donnée. Dans la formule sont indiquées les opérations à effectuer sur la variable indépendante (désignée par

x) pour arriver à la grandeur qui en dépend (désignée par y). Par exemple, la formule

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

montre que, pour obtenir la grandeur y, il faut élever la variable indépendante x au carré, ajouter l'unité à x^2 et diviser l'unité par le résultat obtenu. Si x prend une valeur numérique x_0, alors y prend d'après notre formule une valeur numérique y_0. Les nombres x_0 et y_0 déterminent un point M_0 dans le plan du dessin. On peut choisir à la place de x_0 un autre nombre, x_1, et calculer d'après la formule une nouvelle valeur y_1; le couple des nombres x_1, y_1 détermine un nouveau point M_1 dans le plan. Le lieu géométrique de tous les points dont l'ordonnée est liée à l'abscisse par la formule donnée s'appelle *graphique* correspondant à cette formule.

L'ensemble des points d'un graphique est, en général, infini, et il est physiquement impossible de les construire tous sans exception. Mais ce n'est nullement nécessaire. Dans la plupart des cas il suffit quelques points pour se faire une idée de la forme générale d'un graphique.

La méthode de construction d'un graphique « par points » consiste exactement en ce que l'on marque un certain nombre de points du graphique que l'on joint par une courbe autant lisse que possible.

En tant qu'exemple reprenons le graphique de la fonction

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (1)$$

Dressons la table suivante:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Dans la première ligne nous avons écrit les valeurs $x = 0$, 1, 2, 3, —1, —2, —3. Habituellement, on choisit pour x des valeurs entières puisqu'elles sont plus commodes pour les calculs. La deuxième ligne contient les valeurs respectives de y trouvées d'après la formule (1). Marquons les points correspondants sur le plan (fig. 2). En les joignant par une courbe continue nous obtenons le graphique (fig. 3).

Nous voyons que la règle de construction « par points » est bien simple et n'exige aucune « science ». C'est peut-être pour cette raison que l'application aveugle de cette règle conduit souvent à de grandes erreurs.

Construisons « par points » la courbe donnée par l'équation.

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \tag{2}$$

La table des valeurs de x et y est :

x	0	1	2	3	—1	—2	—3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Les points correspondants du plan sont montrés sur la figure 4. Ce dessin ressemble beaucoup au précédent. En joignant ces points par une courbe continue nous obtenons le graphique (fig. 5). A première vue, rien de plus facile! Il paraît que l'art de construire les graphiques est appris. Tout de même, pour nous contrôler, calculons y pour une valeur intermédiaire de x, par exemple pour $x = 0,5$. Le résultat est inattendu : $y = 16$. Cela contredit notre dessin. Et il n'y a aucune garantie qu'en calculant y pour d'autres valeurs intermédiaires de x (elles sont infinité) on n'aboutisse à des contradictions encore plus frappantes. Il semble qu'il y ait quelque chose de mal défini dans la méthode même de construction « par points ».

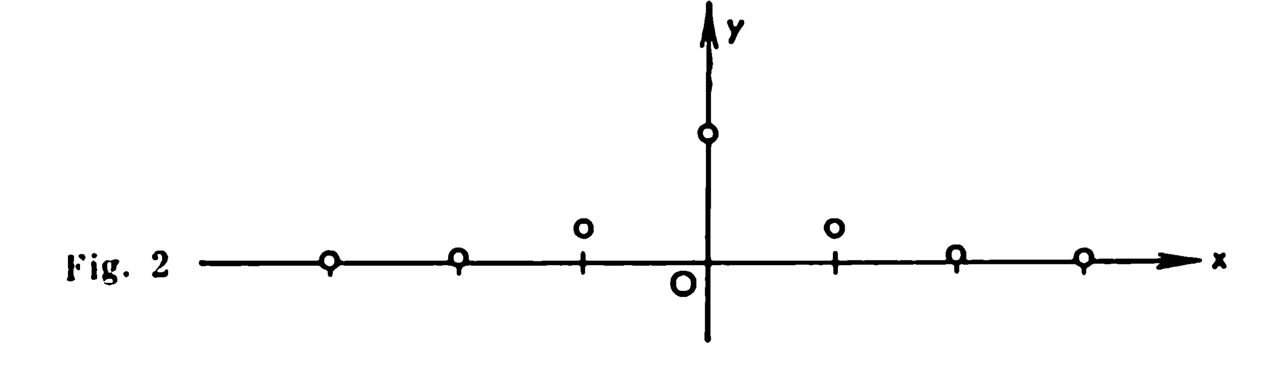


Fig. 2

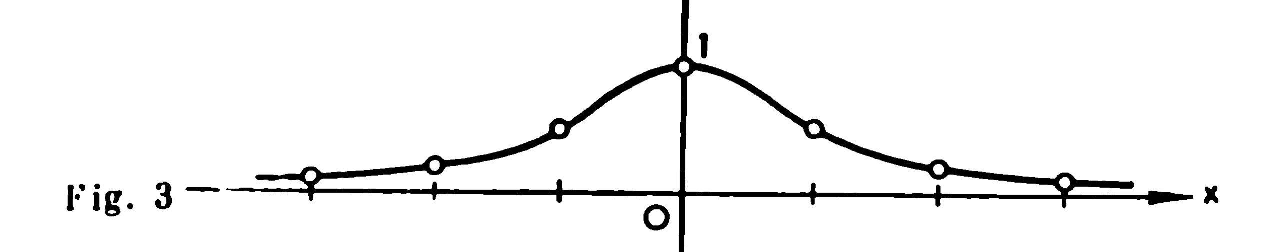


Fig. 3

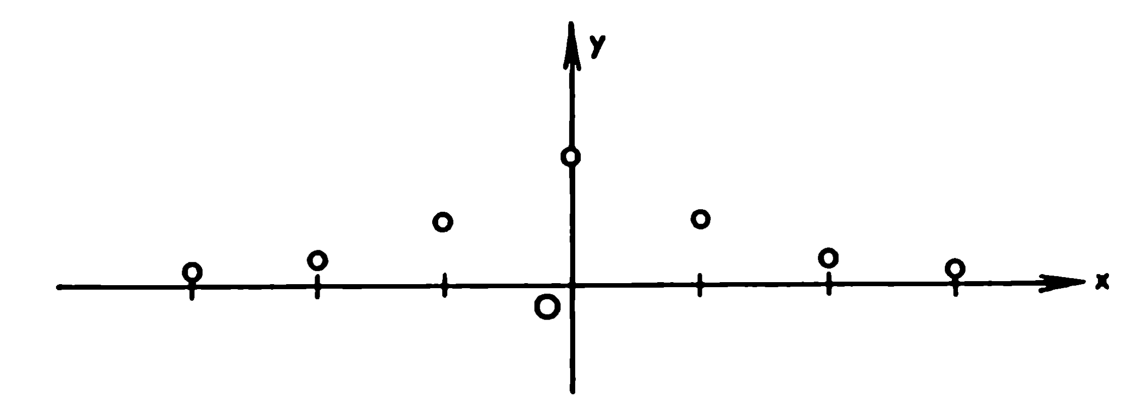


Fig. 4

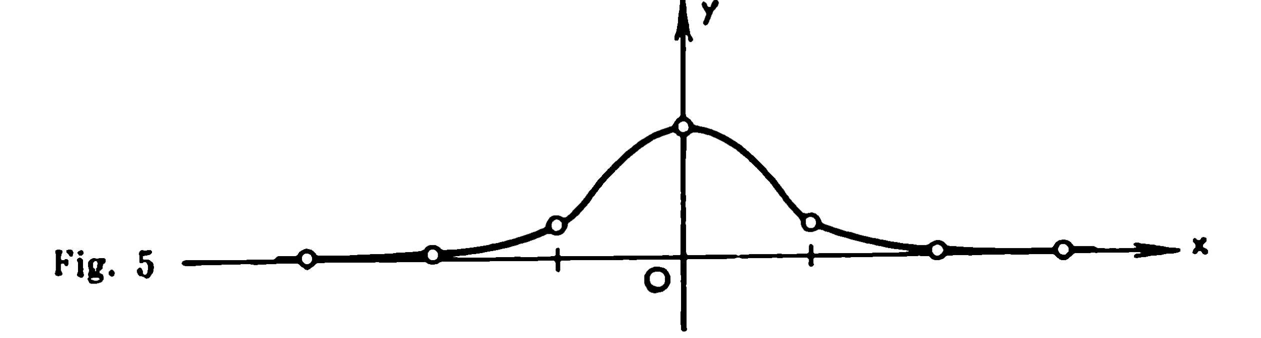


Fig. 5

Nous allons considérer maintenant une autre méthode de construction des graphiques qui garantit mieux contre les surprises pareilles à celle de l'exemple précédent. D'après cette méthode, que nous appellerons « par opérations », il faut effectuer directement sur les graphiques toutes les opérations indiquées dans la formule donnée : addition, soustraction, multiplication, division, etc.

Envisageons quelques exemples les plus simples. Construisons le graphique correspondant à l'équation

$$y = x. \tag{3}$$

Cette équation dit que tous les points de la ligne cherchée ont l'abscisse et l'ordonnée égales. Le lieu géométrique des points de ce type est la bissectrice de l'angle formé par les demi-axes positifs ainsi que de l'angle formé par les demi-axes négatifs (fig. 6). Le graphique correspondant à l'équation

$$y = kx$$

avec un coefficient k donné s'obtient du précédent en multipliant ses ordonnées par un même nombre k. Soit, par exemple, $k = 2$; on devra doubler chaque ordonnée du graphique précédent et on obtiendra une droite qui monte plus rapidement (fig. 7). A chaque pas dans le sens d'accroissement des x la nouvelle droite monte de deux pas suivant l'axe des y. La construction est particulièrement facile sur un papier millimétré ou en carreaux. Dans le cas général de l'équation $y = kx$, on a aussi une droite. Si $k > 0$, elle monte de k pas en ordonnées pour un pas en abscisses. Si $k < 0$, la droite ne monte pas, mais descend.

Considérons une formule un peu plus compliquée :

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Pour tracer le graphique correspondant on doit ajouter à chaque ordonnée de la droite déjà connue $y = kx$ un même nombre b. La droite $y = kx$ se déplacera alors, comme un tout, de b unités vers le haut si $b > 0$ et, naturellement,

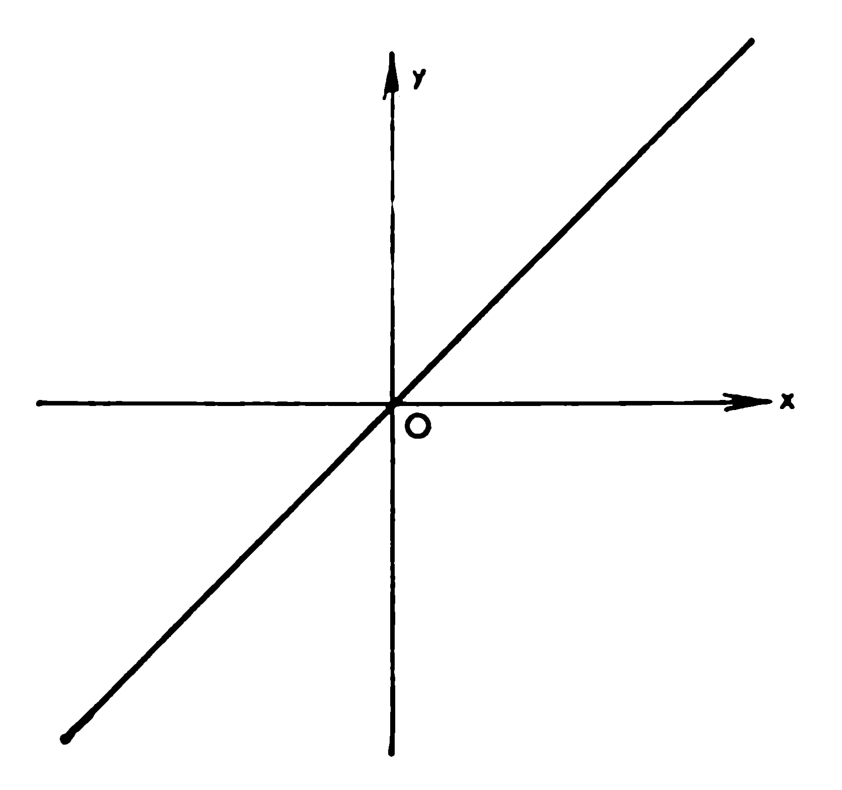


Fig. 6

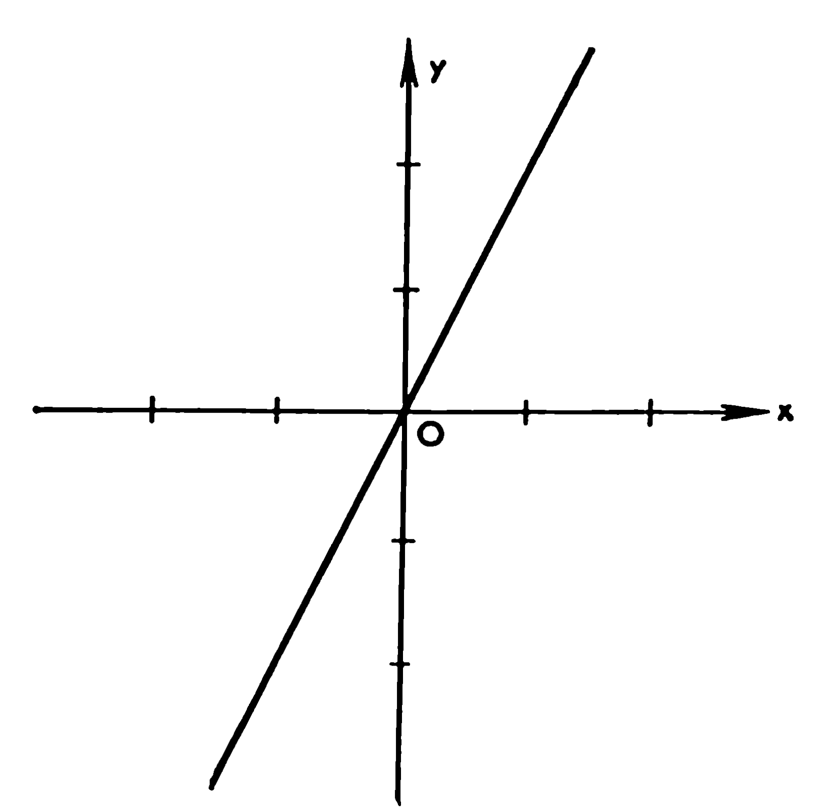


Fig. 7

vers le bas pour $b < 0$. Définitivement, on aura une droite parallèle à la droite initiale et passant non pas par l'origine mais par le point d'ordonnée b sur l'axe des y (fig. 8).

Le nombre k s'appelle *coefficient angulaire*, ou *pente*, de la droite $y = kx + b$; comme nous l'avons déjà dit, il montre de combien de pas monte (descend) la droite pour un pas dans le sens positif en abscisses. Autrement dit, le nombre k est la *tangente* de l'angle que l'axe des x fait avec la droite $y = kx + b$.

A l'équation

$$y = k(x - x_0) + y_0 \tag{4'}$$

correspond une droite de pente k passant par le point (x_0, y_0) (fig. 9), puisque la substitution $x = x_0$ donne $y = y_0$.

En général, le graphique de tout polynôme du premier degré est une droite que l'on construit d'après les règles indiquées. Passons aux graphiques des polynômes du second degré.

Soit la formule

$$y = x^2. \tag{5}$$

On peut la mettre sous la forme :

$$y = y_1^2$$

où

$$y_1 = x.$$

En d'autres termes, on obtiendra le graphique cherché en élevant au carré chaque ordonnée de la ligne déjà connue $y = x$. Voyons ce que cela fera.

Comme $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $(-1)^2 = 1$, nous avons trois points de référence A, B, C (fig. 10). Pour des $x > 1$, $x^2 > x$; cela veut dire qu'à droite du point B, le graphique passera au-dessus de la bissectrice du premier quadrant (fig. 11). Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x$ et le graphique se trouve au-dessous de la bissectrice lorsqu'on est entre les points A et B. Qui plus est, nous affirmons que, en s'approchant du point A, le graphique entre dans n'importe

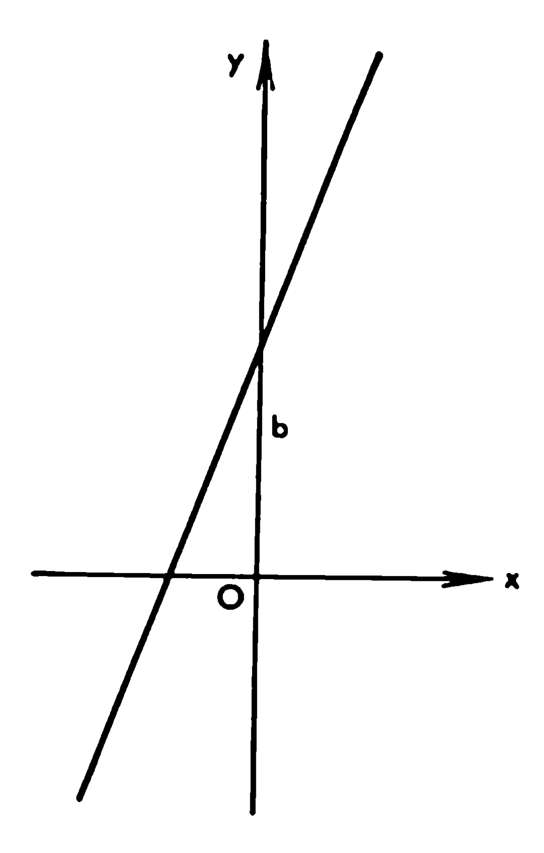


Fig. 8

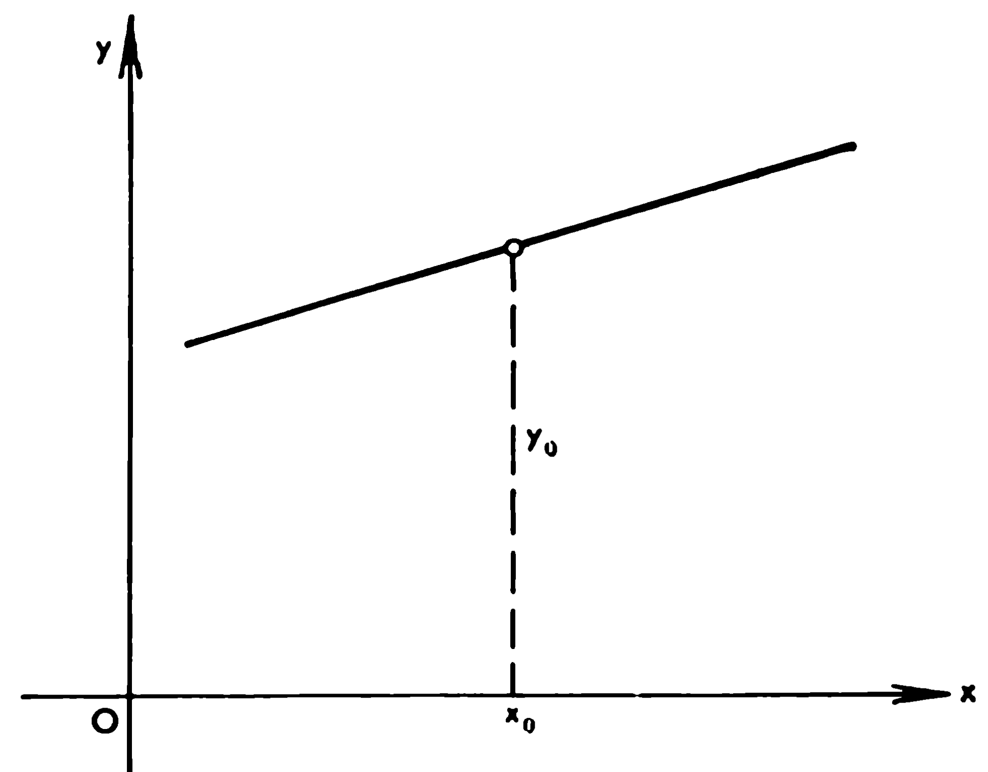


Fig. 9

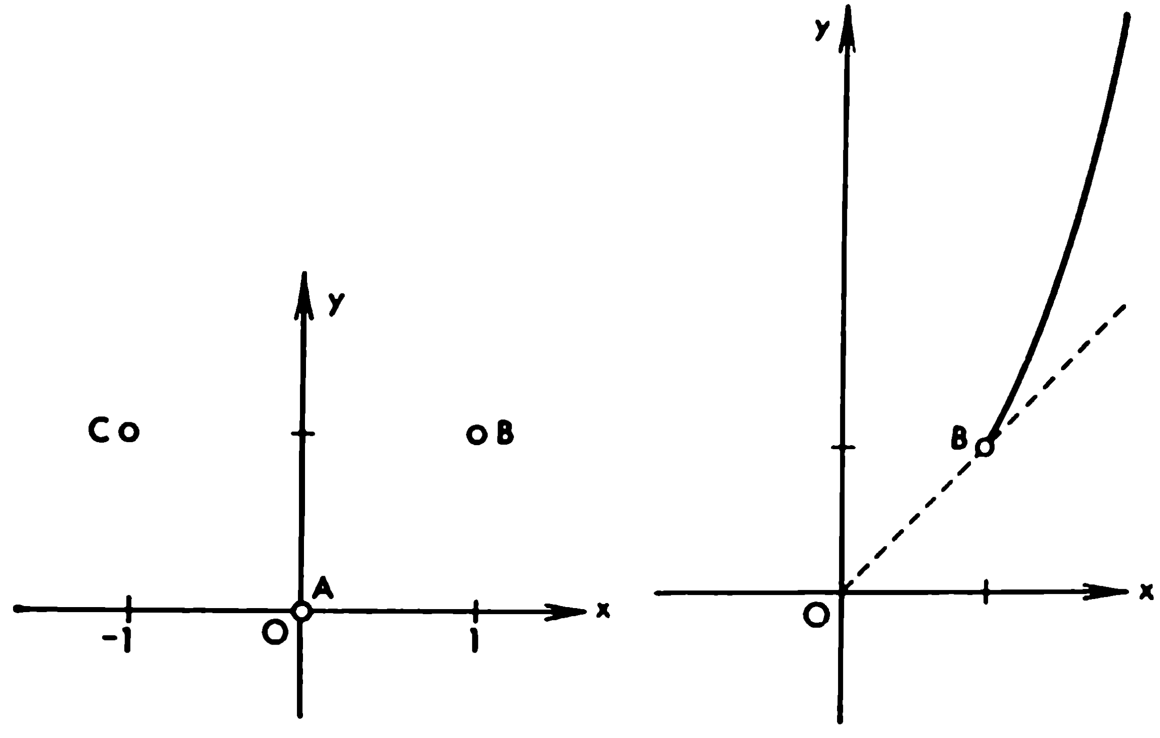


Fig. 10

Fig. 11

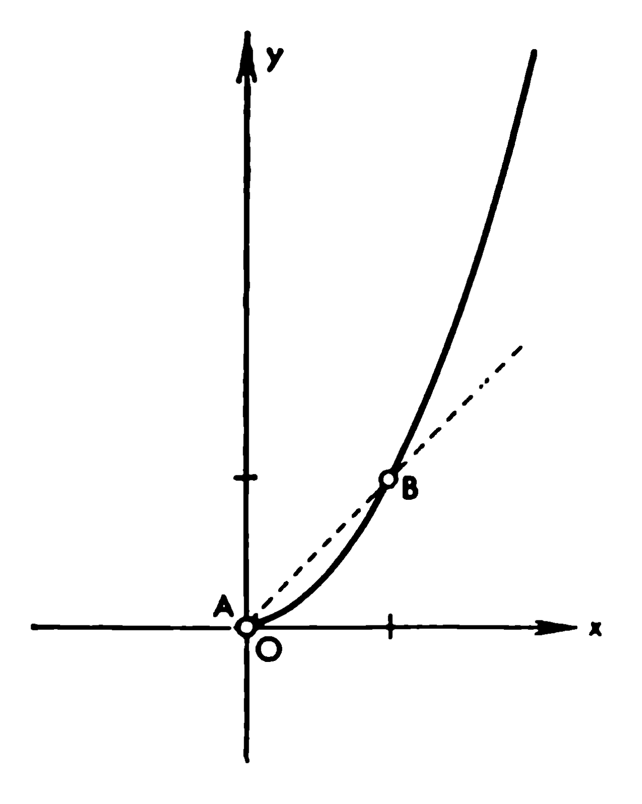


Fig. 12

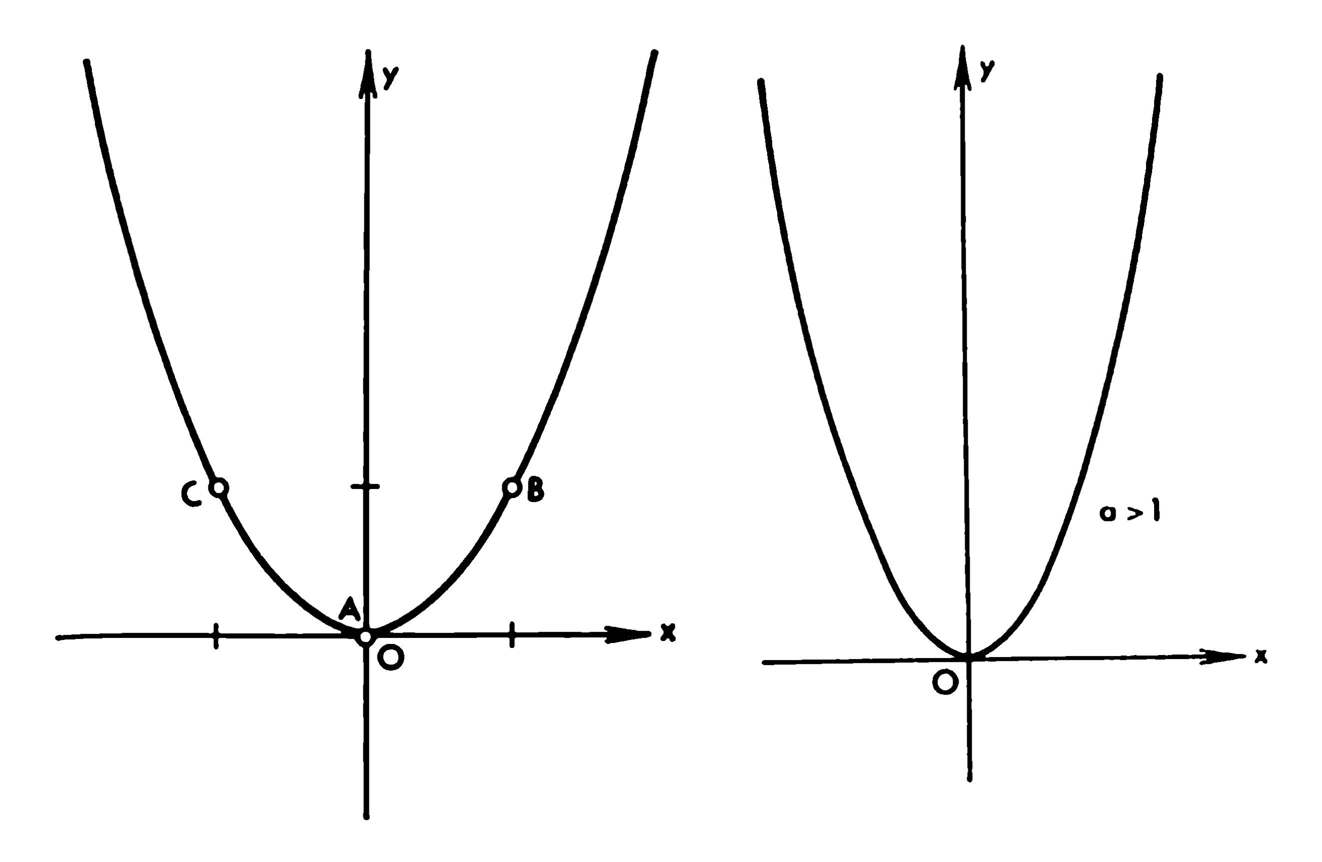


Fig. 13 Fig. 14

quel angle, aussi petit qu'il soit, limité d'en haut par une droite $y = kx$ et d'en bas par l'axe des x; en effet, l'inégalité $x^2 < kx$ est juste dès que $x < k$. Ce fait signifie qu'au point O la courbe cherchée a pour *tangente* l'axe des abscisses (fig. 12). Voyons maintenant ce qui se passe à gauche du point O. Nous savons qu'en élevant au carré deux nombres $-a$ et $+a$ on obtient le même résultat a^2. Ainsi, l'ordonnée de notre courbe pour $x = -a$ sera la même que pour $x = +a$. Géométriquement, ceci veut dire que la branche gauche du graphique est symétrique à la branche droite par rapport à l'axe des ordonnées. Nous aboutissons à la courbe qui s'appelle *parabole* (fig. 13).

En opérant comme plus haut, on peut construire une courbe plus compliquée

$$y = ax^2 \qquad (6)$$

et une courbe encore plus compliquée

$$y = ax^2 + b. \qquad (7)$$

La première s'obtient en multipliant les ordonnées de la parabole (5), que nous appellerons *parabole unité*, par le nombre a.

Pour $a > 1$ on aura une courbe qui ressemble à la parabole unité mais qui monte plus rapidement (fig. 14).

Pour $0 < a < 1$ la courbe monte moins rapidement (fig. 15), et pour $a < 0$ ses branches se renversent et se dirigent vers le bas (fig. 16). La courbe (7) s'obtient de la courbe (6) par translation de cette dernière de b unités vers le haut si $b > 0$ (fig. 17). Et si $b < 0$, la translation se fait vers le bas (fig. 18). Toutes ces courbes sont aussi paraboles.

Voyons un exemple quelque peu plus compliqué sur la construction de graphiques par la méthode de multiplication. Proposons-nous de construire un graphique d'après l'équation

$$y = x(x - 1)(x - 2)(x - 3). \qquad (8)$$

Ici on a un produit de quatre facteurs. Traçons les graphiques de chacun d'eux: ils sont tous des droites parallèles à la bissectrice du premier quadrant et coupant l'axe des ordonnées aux points d'ordonnées 0, —1, —2, —3 respectivement (fig. 19). Aux points 0, 1, 2, 3 de l'axe des x, la courbe cherchée a zéro pour ordonnée puisqu'un produit est nul lorsqu'au moins un des facteurs est nul. Partout ailleurs le produit est non nul et son signe est facile à trouver d'après les signes des facteurs. Ainsi, à droite du point 3 tous les facteurs sont positifs, donc il en est de même du produit. Entre les points 2 et 3 un facteur est négatif, le produit l'est donc aussi. Entre les points 1 et 2 il y a deux facteurs négatifs, donc le produit est positif, etc. Nous arrivons à la répartition des signes du produit montrée sur la figure 20. A droite du point 3, tous les facteurs croissent avec x, donc le produit lui aussi croît et très rapidement. A gauche du point O tous les facteurs croissent en valeur absolue lorsqu'on

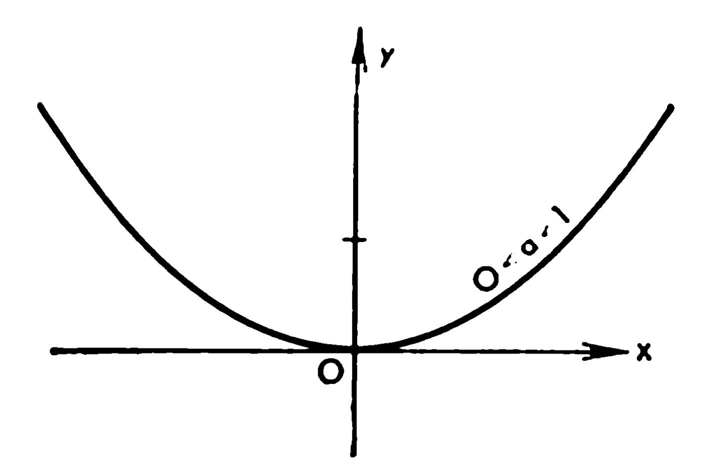


Fig. 15

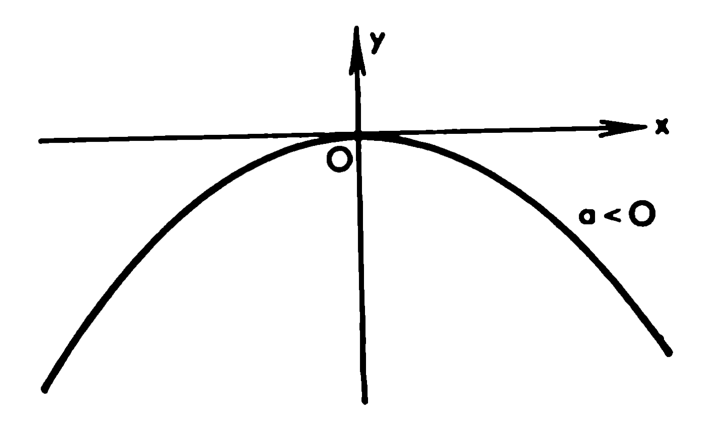


Fig. 16

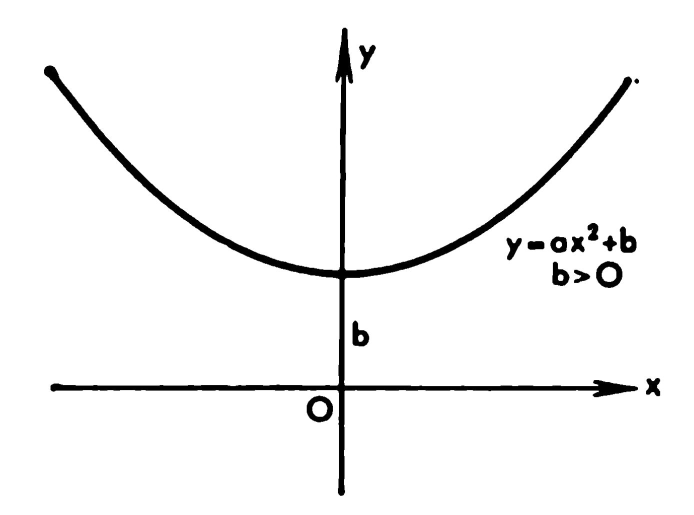


Fig. 17

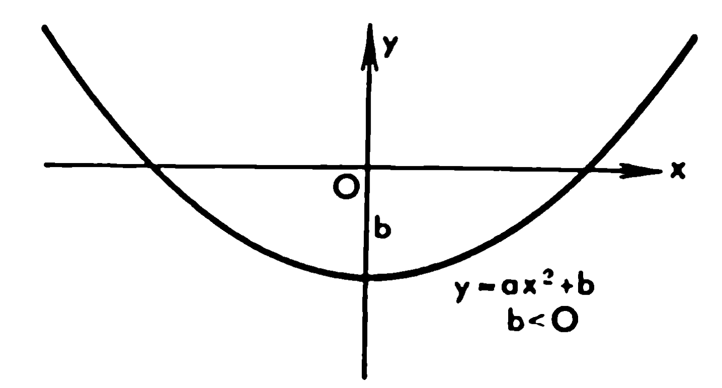


Fig. 18

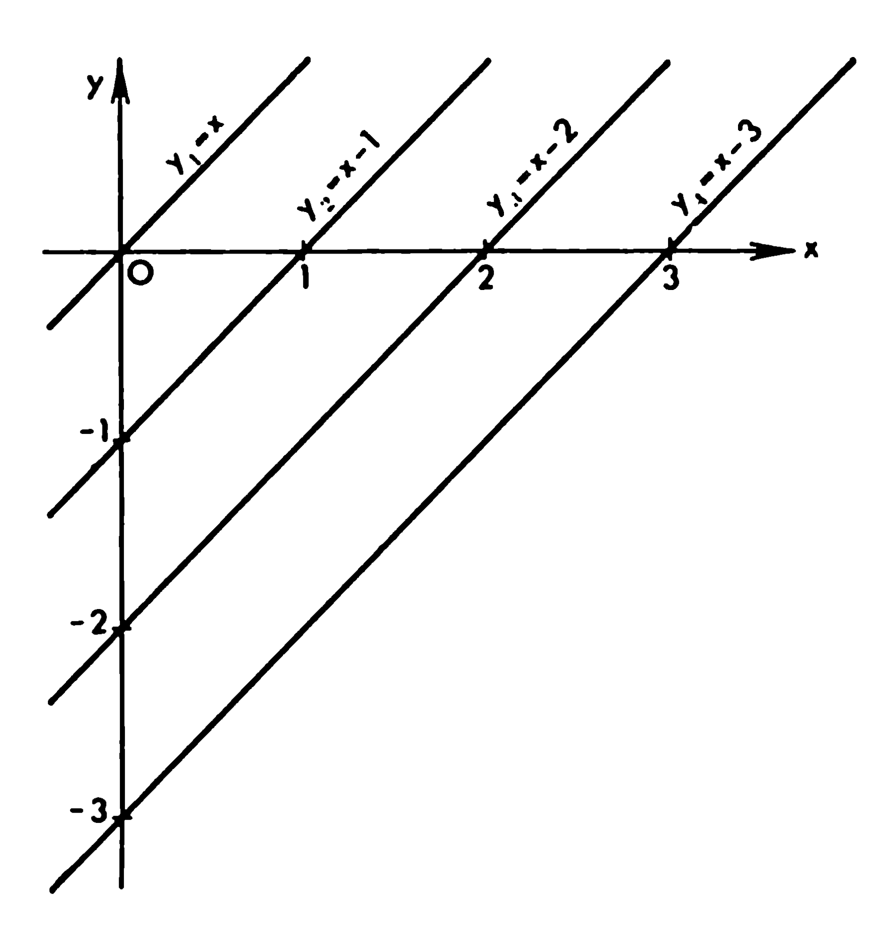


Fig. 19

va vers la gauche, par conséquent le produit (il est positif) croît toujours et très rapidement.

Il est maintenant facile d'ébaucher le graphique (fig. 21).

Jusqu'à ce moment, on n'a considéré que les opérations d'addition et de multiplication. Ajoutons-y la division. Construisons la courbe

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (9)$$

Pour le faire, construisons séparément les graphiques du numérateur et du dénominateur. Le graphique du numérateur

$$y_1 = 1$$

est une droite parallèle à l'axe des abscisses passant à la hauteur 1. Celui du dénominateur

$$y_2 = x^2 + 1$$

est une parabole unité décalée de 1 vers le haut. Les deux graphiques sont montrés sur la figure 22.

Effectuons la division de chaque ordonnée du numérateur par l'ordonnée correspondante (i.e. pour le même x) du dénominateur. Lorsque $x = 0$, nous avons $y_1 = y_2 = 1$, d'où $y = 1$. Pour $x \neq 0$, le numérateur est plus petit que le dénominateur, et le quotient est plus petit que 1. Comme les deux termes sont partout positifs, le quotient l'est aussi et le graphique se trouve donc dans la bande limitée par l'axe des abscisses et la droite $y = 1$. Lorsque x croît indéfiniment, le dénominateur le fait aussi; comme le numérateur reste constant, le quotient tend vers zéro. Tous ces raisonnements conduisent au graphique montré sur la figure 23. On y reconnaît la courbe de la figure 3 que l'on a construite « par points ».

Lors de la division graphique il faut porter une attention particulière aux valeurs de x qui annulent le dénominateur. Si le numérateur ne s'annule pas en même temps, le quotient tend vers l'infini. Traçons, par exemple, la courbe

$$y = \frac{1}{x}. \qquad (10)$$

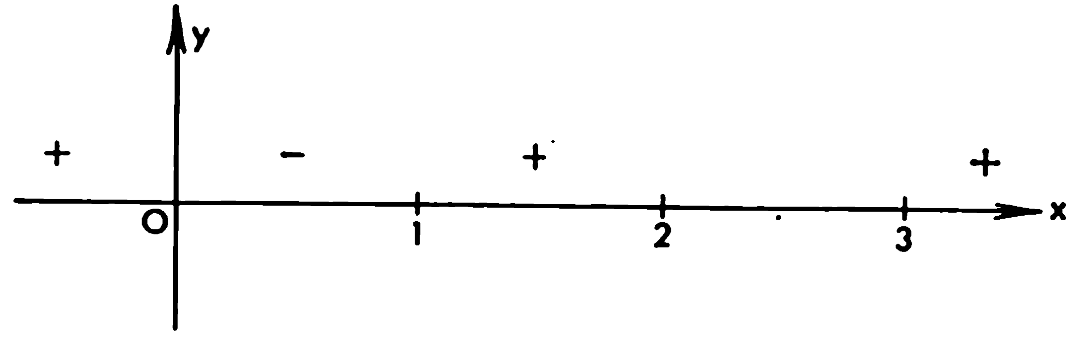


Fig. 20

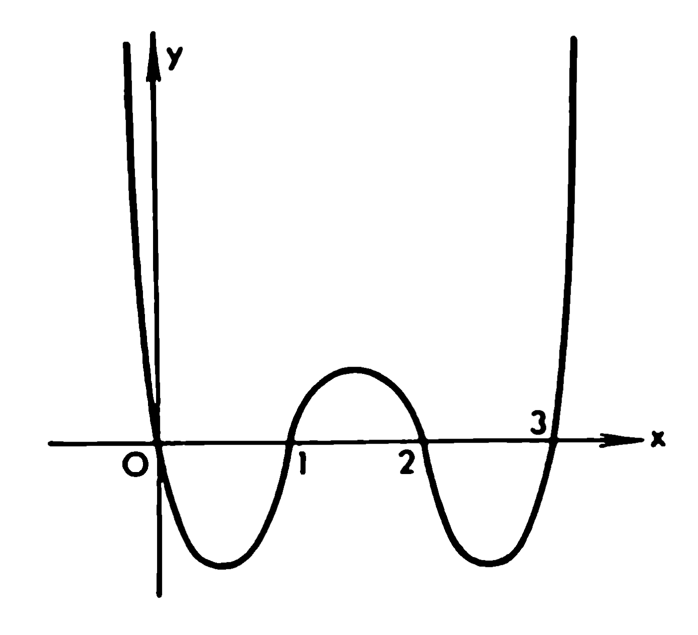


Fig. 21

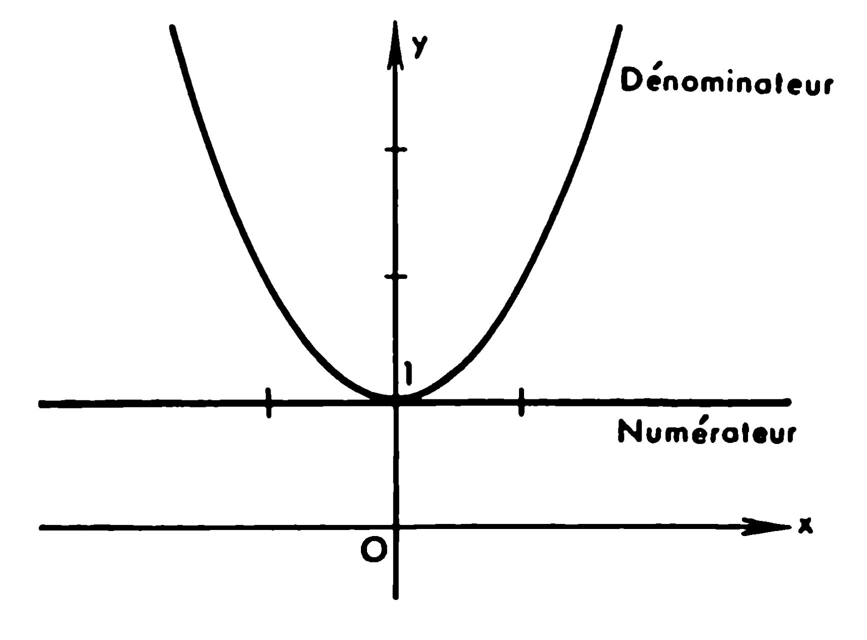


Fig. 22

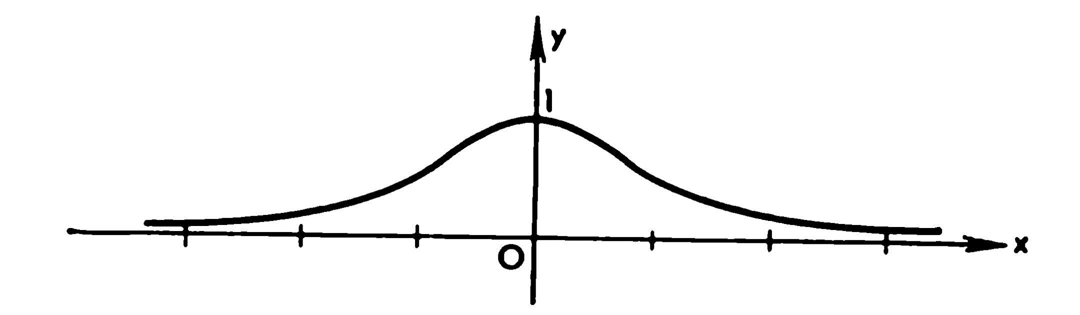


Fig. 23

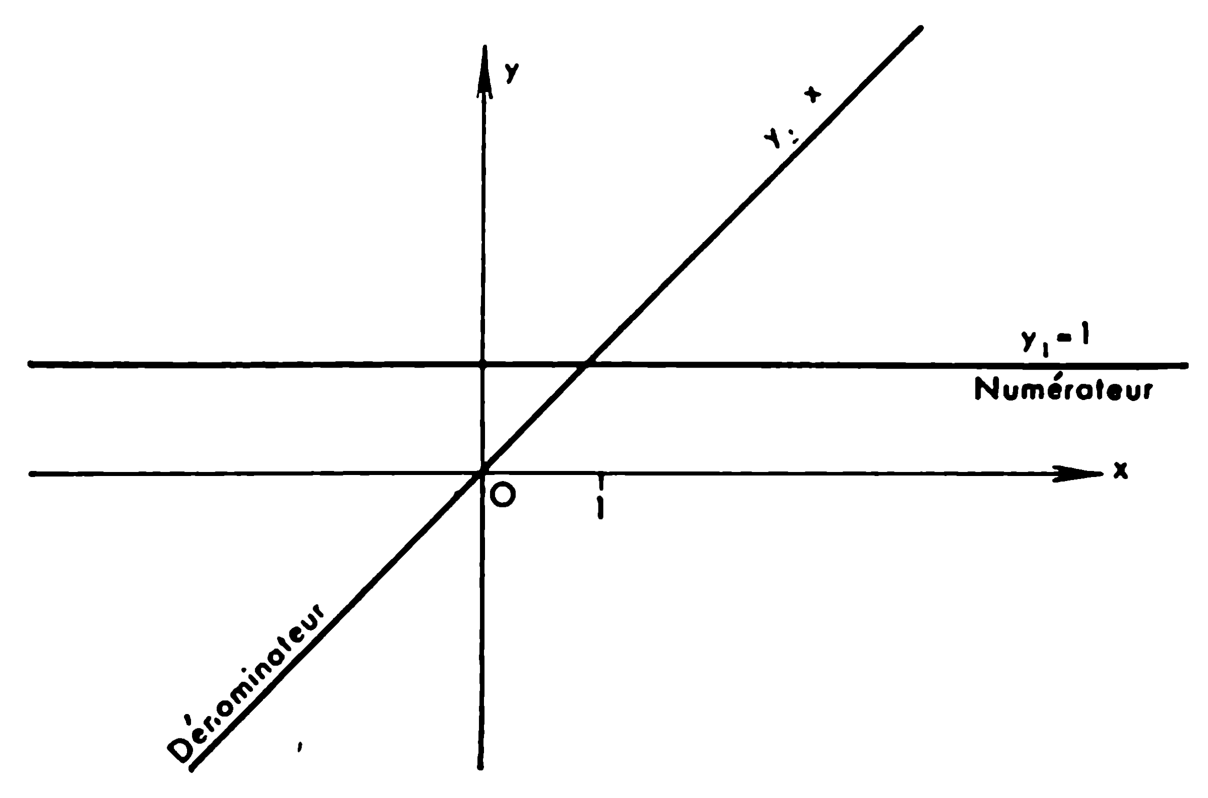


Fig. 24

5—038

Les graphiques du numérateur et du dénominateur nous sont déjà familiers (fig. 24). Pour $x = 1$, on a $y_1 = y_2 = 1$, d'où $y = 1$. Pour $x > 1$, le numérateur est plus petit que le dénominateur, le quotient est plus petit que 1, comme dans l'exemple précédent; lorsque x croît indéfiniment le quotient s'approche de zéro et nous pouvons représenter comme indiqué à la figure 25 la partie du graphique qui correspond aux valeurs $x > 1$.

Considérons maintenant les valeurs de x entre 0 et 1. Lorsque x va de 1 vers zéro, le dénominateur tend vers zéro, tandis que le numérateur vaut toujours 1. Par conséquent, le quotient grandit indéfiniment et dépasse, pour x assez petit, n'importe quel nombre aussi grand soit-il. Nous obtenons ainsi une branche allant vers l'infini (fig. 26). Pour $x < 0$, le dénominateur et, par conséquent, le quotient deviennent négatifs. L'allure du graphique est représentée sur la figure 27.

Forts de ces constructions préalables, nous pouvons maintenant aborder la construction du graphique dont il s'agissait au début :

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \qquad (11)$$

Commençons par le graphique du dénominateur. La courbe $y_1 = 3x^2$ est la parabole unité « triplée » (fig. 28). La soustraction de l'unité revient à la translation du graphique d'une unité vers le bas (fig. 29). La courbe coupe l'axe des x en deux points que nous trouvons aisément en égalant $3x^2 - 1$ à zéro :

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}577 \ldots$$

Elevons au carré le graphique obtenu. Les ordonnées aux points x_1 et x_2 restent nulles. Toutes les autres ordonnées seront positives, de sorte que le graphique passera au-dessus de l'axe des abscisses. L'ordonnée au point $x = 0$ vaut $(-1)^2 = 1$, et c'est la plus grande ordonnée entre x_1 et x_2.

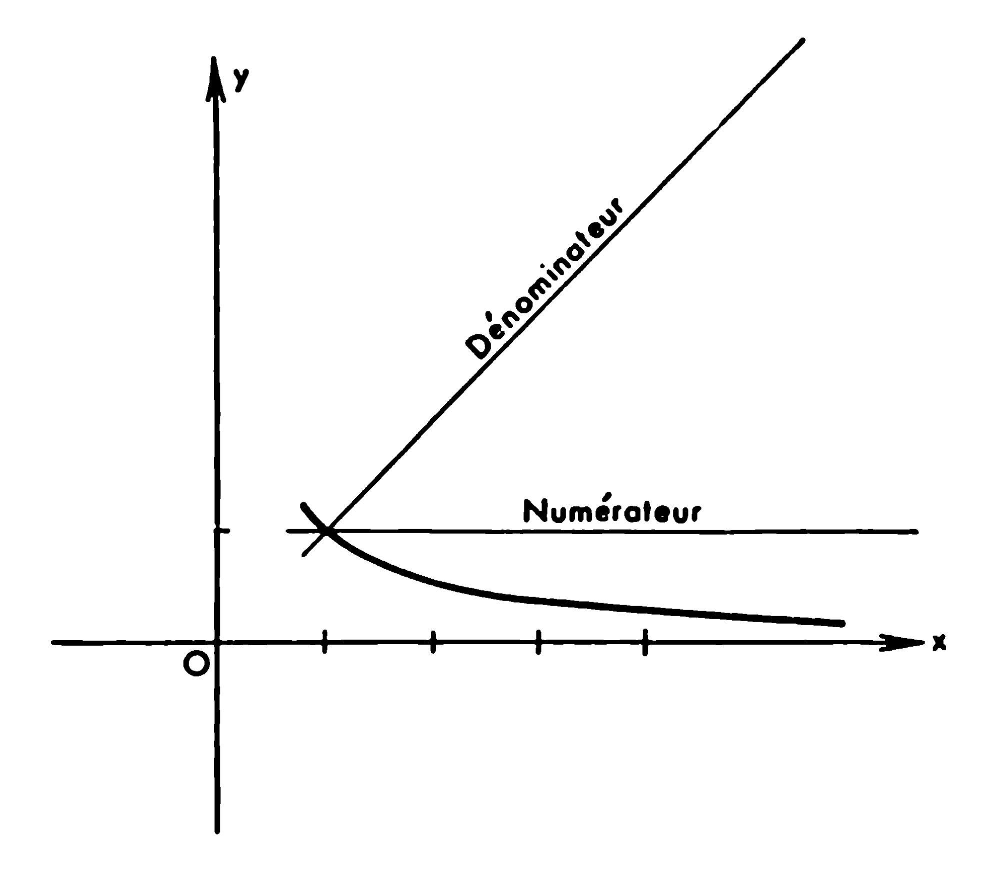

y
Dénominateur
Numérateur
O
x

Fig. 25

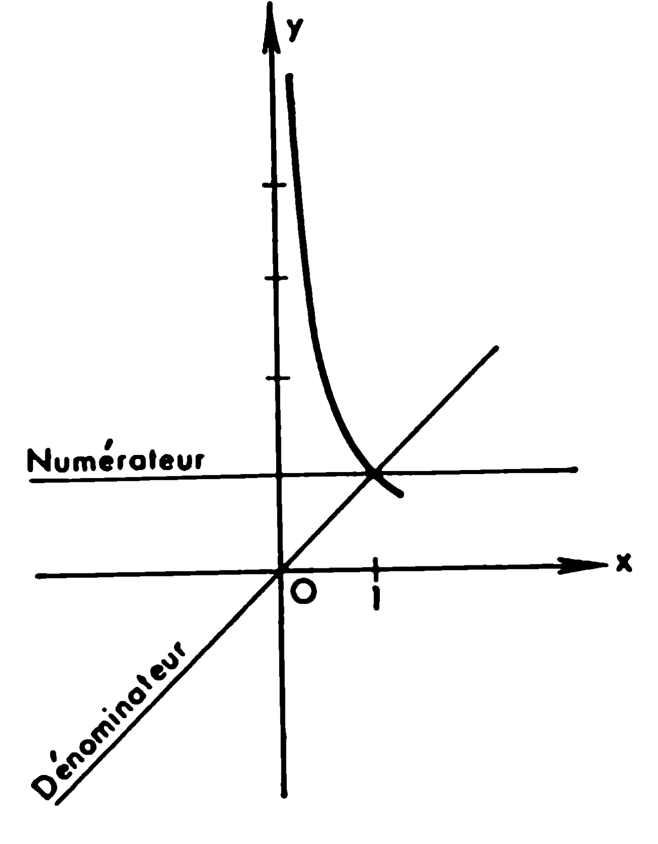

y
Numérateur
O
1
x
Dénominateur

Fig. 26

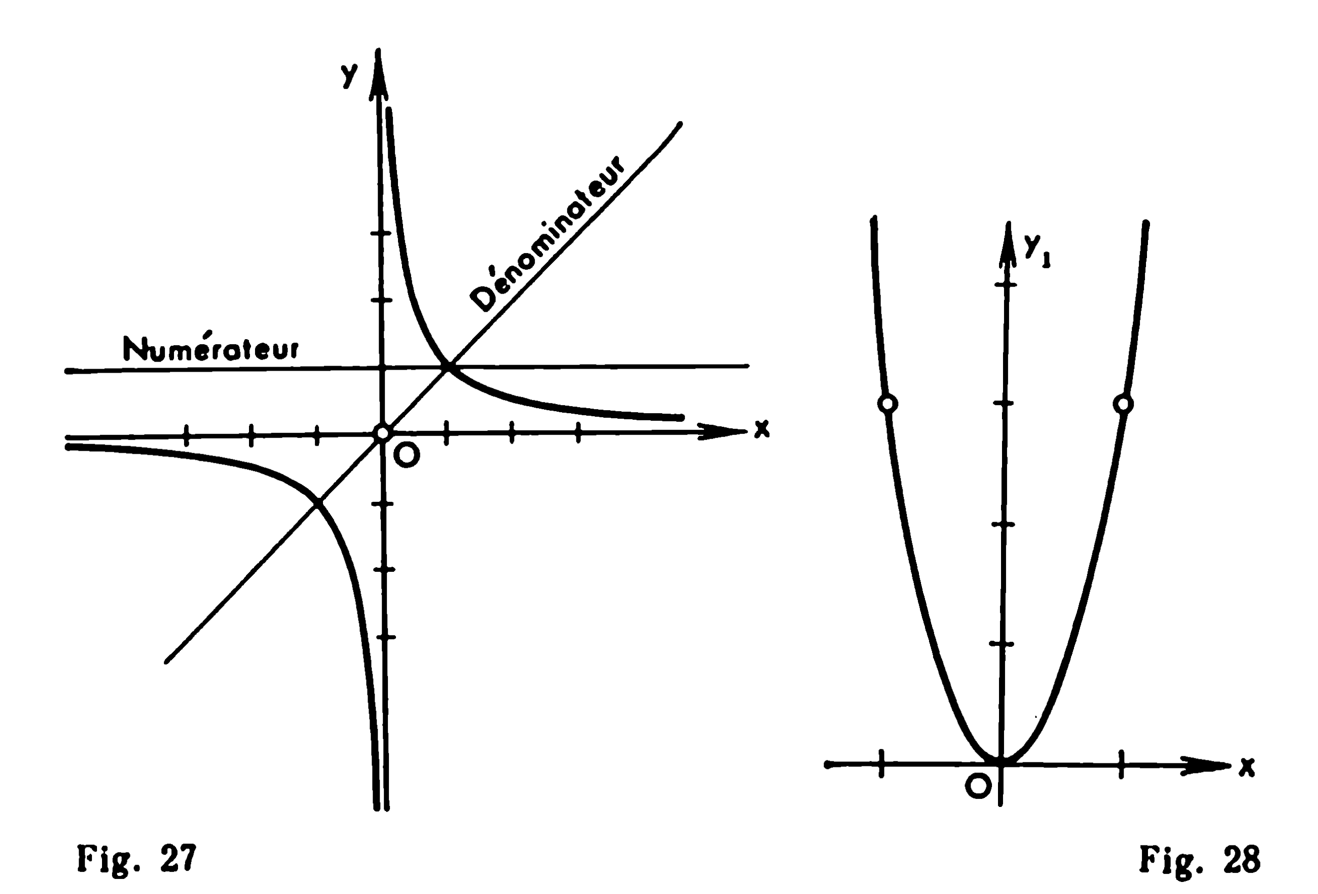


Fig. 27 Fig. 28

A l'extérieur de ce segment, la courbe monte rapidement des deux côtés de l'axe des ordonnées (fig. 30).

Le graphique du dénominateur est construit. Sur la même figure, nous avons représenté en pointillé le graphique du numérateur $y_1 = 1$. Il ne reste qu' à diviser le numérateur par le dénominateur. Comme ils sont partout de même signe, le quotient sera positif et tout le graphique passera au-dessus de l'axe des abscisses. Pour $x = 0$ le numérateur est égal au dénominateur, et leur rapport vaut 1. A partir du point 0 avançons-nous vers la droite le long de l'axe des abscisses. Le numérateur reste toujours égal à 1, le dénominateur décroît, donc le quotient *croît* à partir de la valeur 1. Lorsqu'on atteint la valeur $x_2 = 0{,}577...$, le dénominateur s'annule. Ceci veut dire que, vers ce moment, le quotient s'éloigne vers l'infini (fig. 31). Le point x_2 passé, le dénominateur varie rapidement dans le sens inverse à partir de 0,

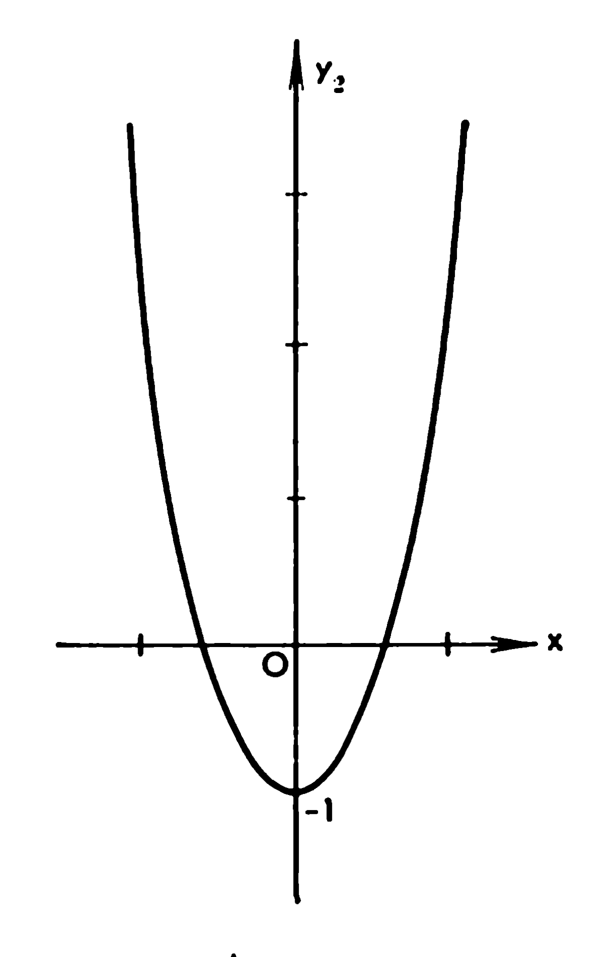


Fig. 29

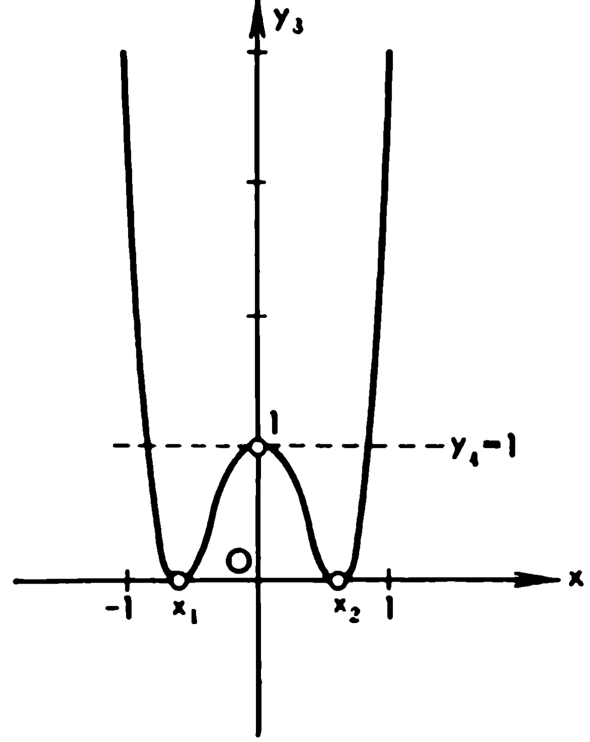


Fig. 30

atteint la valeur 1, puis croît indéfiniment. Le quotient, au contraire, revient de l'infini à la valeur 1, coupe la droite $y = 1$ au même point que y_3 et puis tend vers zéro (fig. 32).

A gauche de l'axe des ordonnées on aura la même situation (fig. 33).

Nous avons marqué sur ce graphique les points correspondant aux valeurs entières $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Ce sont les mêmes points que nous avons utilisés en traçant le graphique « par points » (fig. 5). L'allure réelle du graphique est bien différente de ce qu'on a construit sur la figure 5. Nous voyons qu'en réalité, au lieu de descendre progressivement de la valeur 1 (pour $x = 0$) à la valeur 1/4 (pour $x = 1$) et de continuer de la même manière, la courbe monte vers l'infini. Ici on peut repérer le point de coordonnées $x = \frac{1}{2}$, $y = 16$ pour lequel il n'y avait pas de place sur le graphique incorrecte, mais qui se situe bien sur le graphique correcte.

A la fin de ce paragraphe résumons les règles générales que l'on doit suivre en construisant les graphiques « par opérations »:

a) Il faut commencer la construction par les opérations les plus simples de la formule donnée, en passant aux plus compliquées.

b) En multipliant les graphiques prêter attention aux points où les *facteurs s'annulent* (au moins un d'eux); entre ces points, ne pas oublier la règle des signes.

c) En divisant les graphiques prêter attention aux points où le *dénominateur s'annule.* Si le numérateur est non nul à un point de ce type, les branches de la courbe s'éloignent à l'infini, vers le haut ou vers le bas, suivant les signes du numérateur et du dénominateur.

d) Faire attention au comportement de la courbe à l'infini, pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

Nous n'avons parlé que des opérations les plus simples que l'on peut effectuer sur les graphiques. Plus exactement,

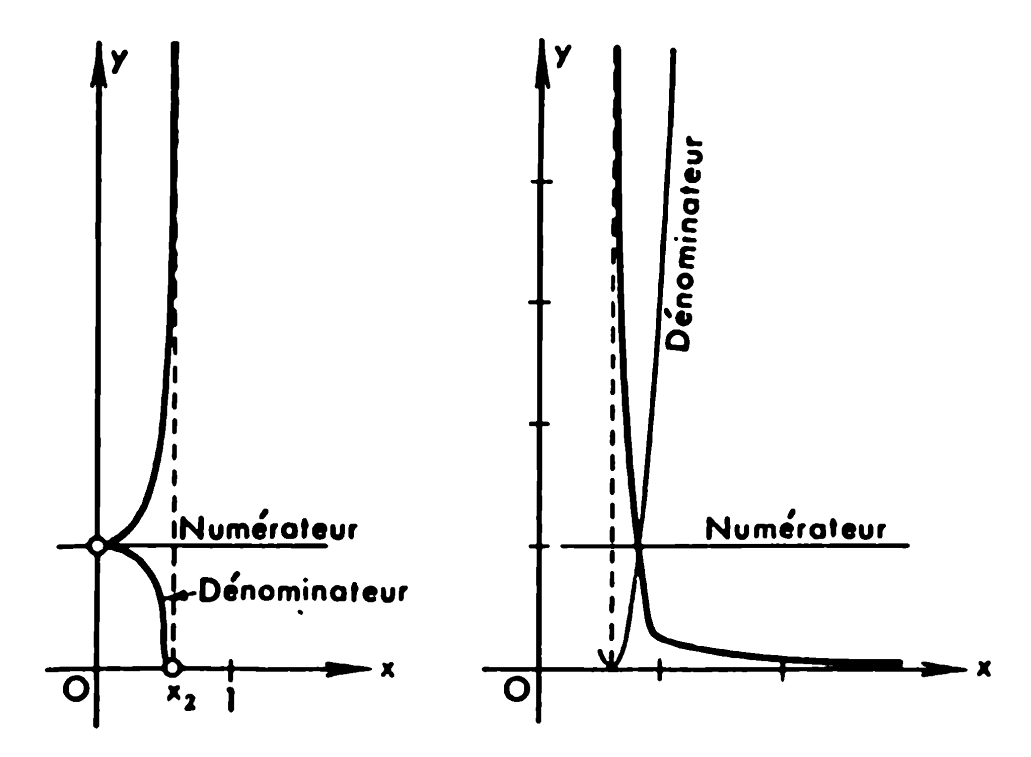


Fig. 31

Fig. 32

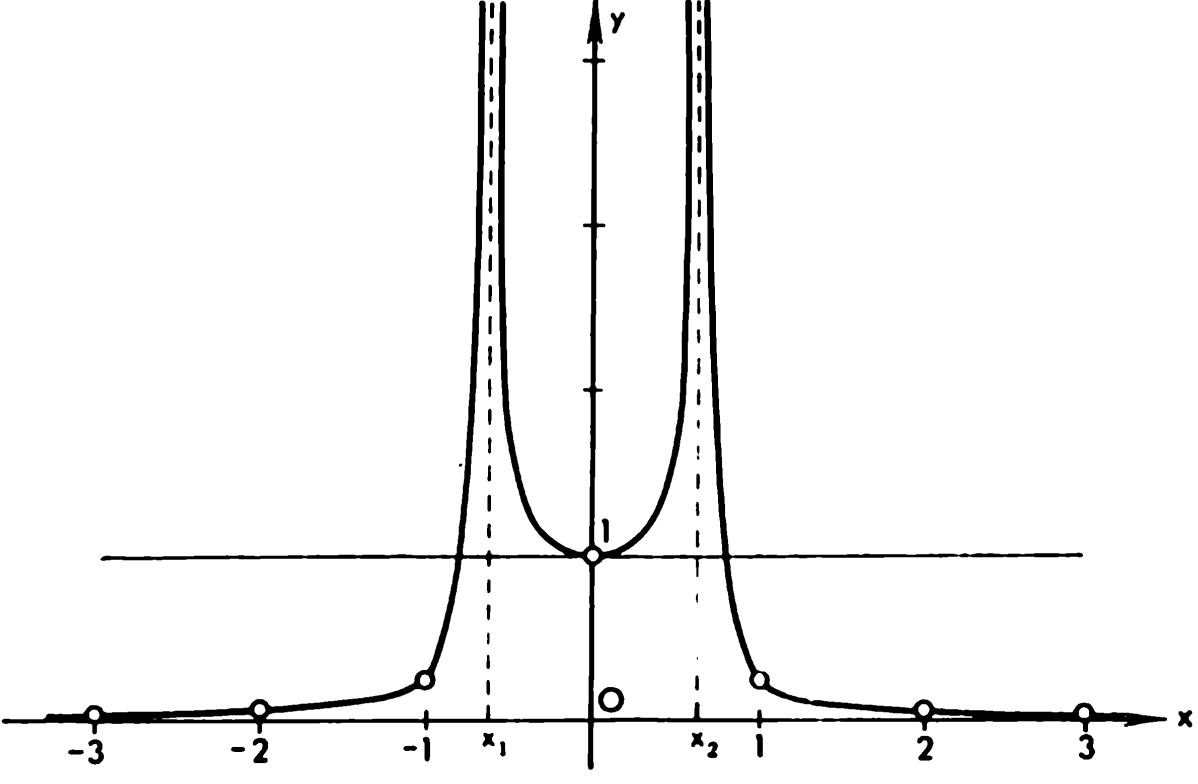


Fig. 33

nous sommes partis de l'équation la plus simple $y = x$ et puis nous avons utilisé les quatre opérations arithmétiques: addition, soustraction, multiplication et division.

Les fonctions $y(x)$ que l'on peut obtenir à l'aide de ces opérations se mettent sous la forme de quotient de deux polynômes:

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

et sont appelées *fonctions rationnelles* de la variable x. (Dans l'analyse, on étudie bien d'autres fonctions, mais leur définition même exige une théorie développée des nombres réels; c'est la raison pour laquelle, dans la présente brochure, nous nous bornons aux fonctions rationnelles.)

Au lecteur qui s'est intéressé à la construction de graphiques « par opérations », nous proposons quelques exercices pour se contrôler et s'entraîner.

Exercices

Tracez les graphiques d'après les équations suivantes:

1.1. $y = x^2 + x + 1$.

1.2. $y = x(x^2 - 1)$.

1.3. $y = x^2(x - 1)$.

1.4. $y = x(x - 1)^2$.

1.5. $y = \frac{x}{x-1}$.

● INDICATION. Dans l'exercice 1.5 il est utile de dégager la partie entière:

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

1.6. $y = \frac{x^2}{x-1}$.

1.7. $y = \frac{x^3}{x-1}$.

● INDICATION. Dans les exercices 1.6 et 1.7 aussi il est commode de dégager la partie entière.

$$1.8.\quad y = \pm \sqrt{x}.$$

● INDICATION. Dans le domaine réel la racine carrée de x existe pour $x \geqslant 0$ *) et n'existe pas pour $x < 0$.

$$1.9.\quad y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Démontrer que cette courbe est une circonférence.

● INDICATION. Utiliser la définition de la circonférence et appliquer le théorème de Pythagore.

$$1.10.\quad y = \pm \sqrt{1 + x^2}.$$

Démontrez que les branches de cette courbe s'approchent indéfiniment des bissectrices des quadrants lorsque $x \to \infty$.

● INDICATION. $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

$$1.11.\quad y = \pm x \sqrt{x(1 - x)}.$$

$$1.12.\quad y = \pm x^2 \sqrt{1 - x}.$$

$$1.13.\quad y = \frac{1-x^2}{2 \pm \sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.14.\quad y = x^{2/3} (1 - x)^{2/3}.$$

Les réponses à tous les exercices sont données pp. 108-110.

---

*) Une affirmation qui n'est point évidente, mais dont la preuve exige une théorie développée des nombres réels. On en trouvera la démonstration dans tout bon manuel d'analyse. Ici on ne demande que de tracer le graphique de la racine en admettant son existence pour $x \geqslant 0$.

2. LES DÉRIVÉES

La méthode de construction d'un graphique « par opérations » aide à se former une idée générale sur la variation d'une fonction. Mais de telles méthodes ne permettent pas de répondre à certaines questions précises. Supposons qu'une courbe (fig. 34) descend jusqu'à une valeur y_0 correspondant à un certain x_0, puis commence à monter; on dit que la fonction $y(x)$ admet au point x_0 un *minimum local*. On dit de même que la fonction $y = y(x)$ possède au point x_0 un *maximum local* lorsque son graphique monte quand $x < x_0$ et descend une fois la valeur x_0 passée (fig. 35). On peut se demander quelles sont les valeurs exactes de x_0 et y_0.

Il est aisé de se figurer une situation concrète où un problème pareil puisse se poser. Soit, par exemple, une usine pour laquelle le graphique de la figure 34 exprime le coût de la production d'une tonne de produit en fonction de la consommation journalière d'énergie électrique. Si la consommation est faible, la durée de la production d'une tonne est longue, et le coût de la production est grand vu les frais (payement du personnel, etc.). Si l'énergie se consomme en quantités élevées, la fabrication du produit prend moins de temps mais le coût augmente à cause des frais énergétiques accrus. Pour une certaine valeur de la consommation journalière d'énergie, le coût d'une tonne de produit est minimal; naturellement, on tient beaucoup à savoir quel est ce coût minimal et à quelle consommation journalière d'énergie il correspond. Par la suite, nous verrons un problème de ce genre (page 86).

Pour répondre exactement à la question formulée plus haut sur la position du point de minimum local, on a besoin de certaines nouvelles méthodes qui nous introduisent dans un chapitre de l'analyse mathématique appelé *calcul différentiel.*

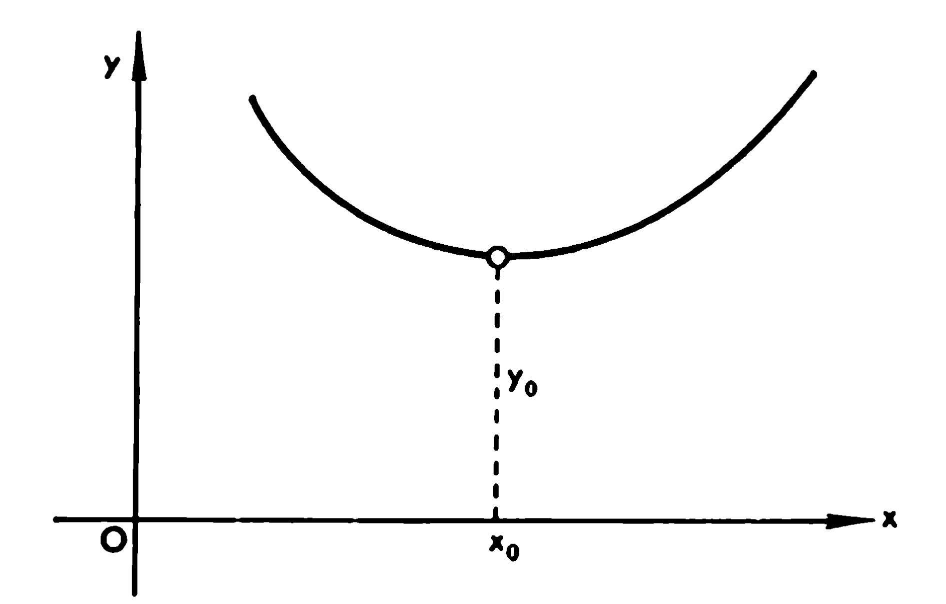


Fig. 34

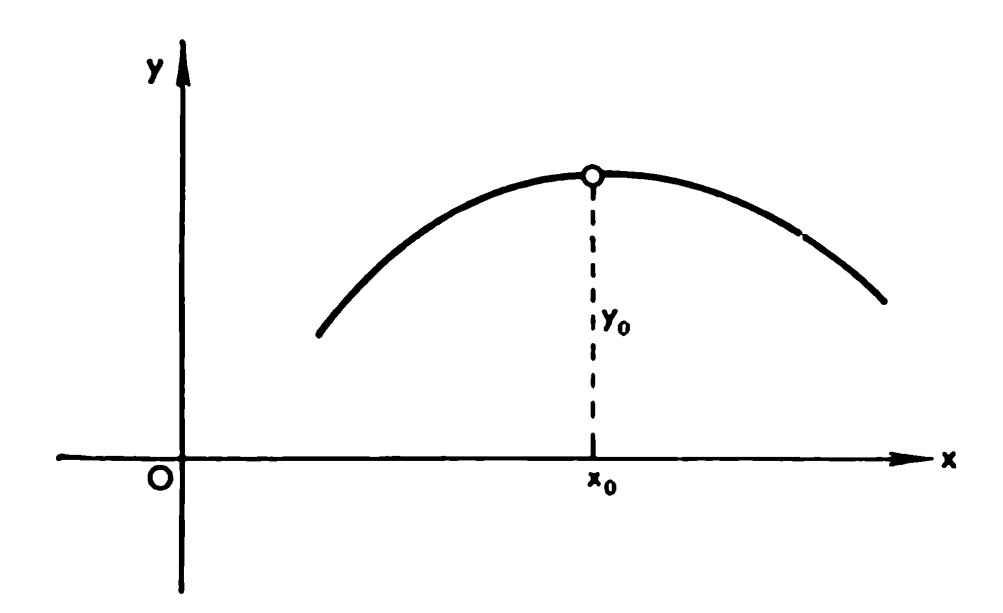


Fig. 35

Voici l'idée d'une solution du problème posé. En tout point du graphique $y(x)$, on peut tracer la droite tangente. La tangente en un point A du graphique $y(x)$ (fig. 36) est définie en tant que droite α menée par le point A et telle que la courbe $y(x)$, en s'approchant du point A, pénètre dans tout angle de sommet A contenant la droite α et y reste, aussi petit que soit cet angle. (C'est exactement en ce sens que l'axe des abscisses était considérée comme tangente à la parabole unité dans le § 1.) Une droite quelconque β passant par le point A s'appelle *sécante* par rapport au graphique $y(x)$; pour une sécante qui n'est pas tangente, on peut toujours indiquer un angle de sommet A et de bissectrice β dans lequel la courbe ne pénètre pas au voisinage du point A (fig. 37). Désignons par $k = k(x)$ le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y). Cette fonction $k(x)$ s'appelle *dérivée de la fonction* $y(x)$. Nous montrerons un peu plus bas que si $y(x)$ est un polynôme, $k(x)$ l'est aussi; si $y(x)$ est une fonction rationnelle, il en est de même de $k(x)$; nous donnerons des règles exactes du calcul de $k(x)$. Supposons que la fonction $k(x)$ pour $y(x)$ donné soit trouvée. Au point cherché (x_0, y_0) du minimum local, la tangente α doit être horizontale (voici la démonstration par l'absurde : nous avons vu que la courbe $y = y(x)$ pénètre dans tout angle, aussi petit soit-il, contenant la droite α; or, si la droite α est inclinée, on peut construire un petit angle de bissectrice α dont les deux côtés ont les pentes de même signe (fig. 36), la courbe $y = y(x)$ ne peut donc pas avoir un minimum local). Par conséquent, au point $x = x_0$ de minimum local nous avons $k(x_0) = 0$. Ecrivons l'équation

$$k(x) = 0.$$

En général, cette équation peut avoir plusieurs solutions. Chacune d'elles détermine un point (x_0, y_0) sur la courbe $y = y(x)$, où la tangente est horizontale; nous avons à trouver toutes ces solutions et à en séparer celle qui nous

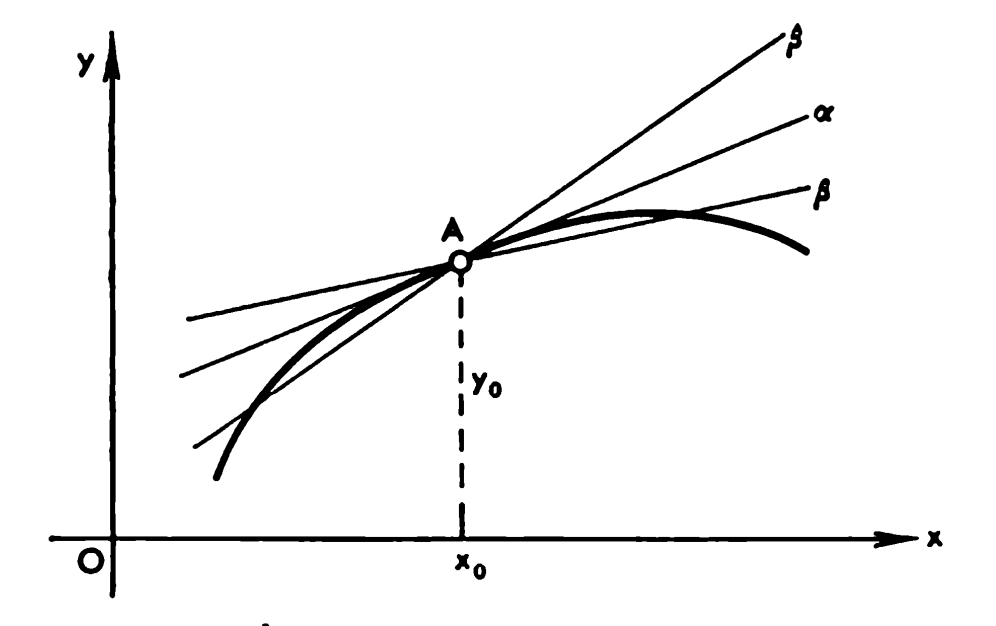


Fig. 36

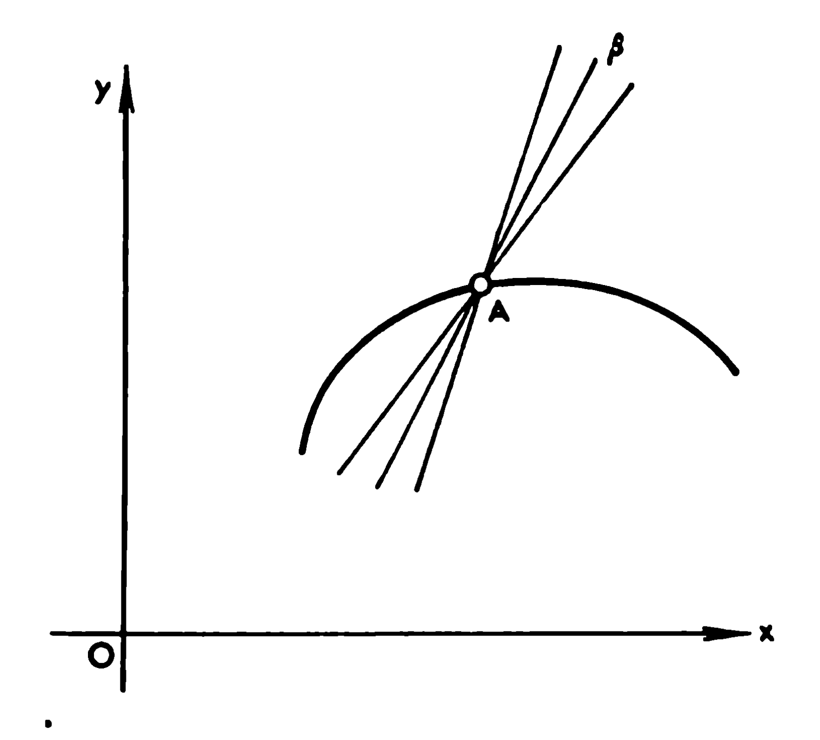


Fig. 37

intéresse. Ainsi, une fois la fonction $k(x)$ connue, le problème se réduit à la résolution d'une équation algébrique.

Passons à la construction de la fonction $k(x)$. Soit d'abord la parabole unité $y = x^2$. Nous tenons à trouver la pente de la tangente à cette parabole en un point (x_0, y_0).

Désignons par Δx et Δy les accroissements de l'abscisse et de l'ordonnée respectivement de la parabole en passant d'un point (x_0, y_0) à un point proche (x_1, y_1):

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 + \Delta y$$

(fig. 38). Comme

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,$$

nous trouvons en éliminant y_0 entre ces deux équations:

$$\Delta y = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Menons la sécante par les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) (fig. 39). Sa pente vaut évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x,$$

et son équation complète a la forme [cf. (4')]:

$$y = (2x_0 + \Delta x)(x - x_0) + y_0. \tag{12}$$

Supposons que Δx devient de plus en plus petit en tendant vers zéro (fig. 40). Alors la sécante (12) tourne autour du point (x_0, y_0) et, lorsque Δx devient nul, occupe la position décrite par l'équation

$$y_{\tan} = 2x_0(x - x_0) + y_0. \tag{12'}$$

Cette droite qui est la limite de la rotation de la sécante *est* exactement *la tangente cherchée à la parabole* $y = x^2$ *au point* (x_0, y_0).

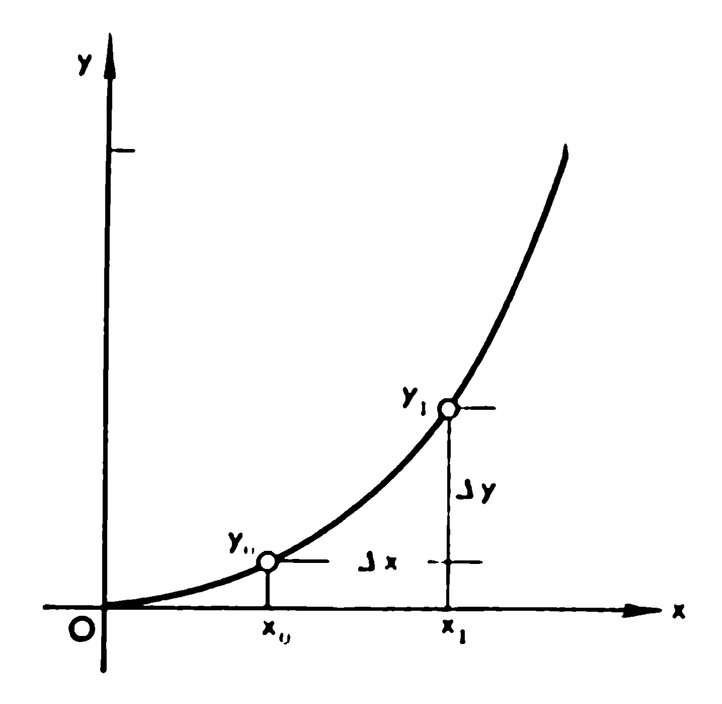


Fig. 38

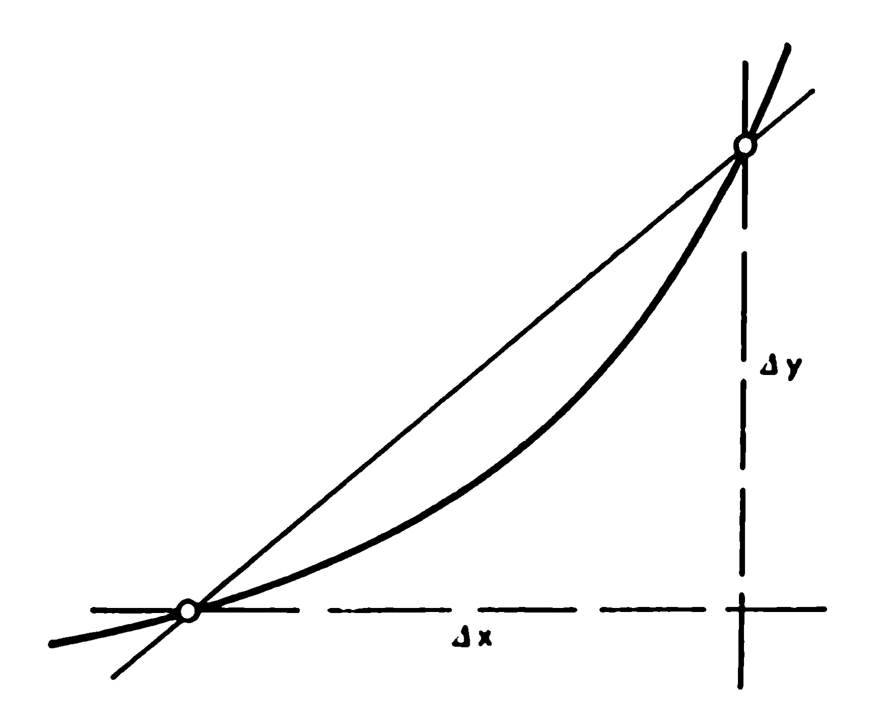


Fig. 39

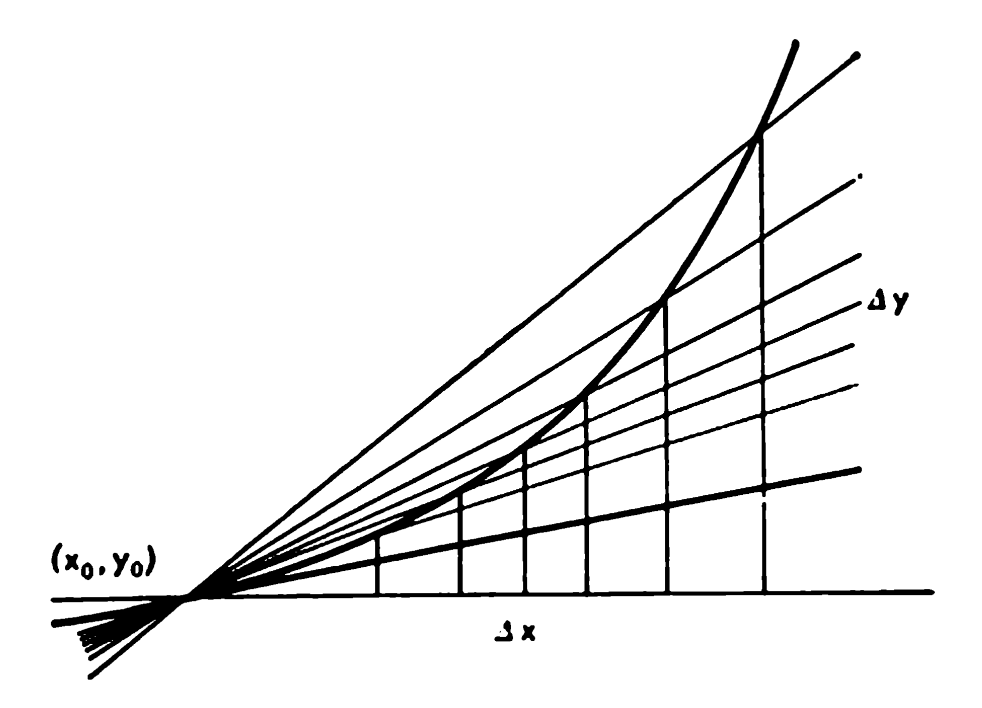


Fig. 40

Démontrons cette affirmation. L'équation de la courbe $y = x^2$ peut être mise sous la forme

$$y = y_0 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2 =$$
$$= y_0 + [2x_0 + (x - x_0)](x - x_0).$$

On voit que, l'écart entre x et x_0 étant petit, le graphique se trouve à l'intérieur de tout angle, aussi petit soit-il, formé par les droites

$$y = y_0 + (2x_0 \pm \varepsilon)(x - x_0);$$

c'est ce qui a lieu si $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$. Comme la droite (12') est à l'intérieur de cet angle pour tout ε, elle sera la tangente cherchée conformément à la définition donnée plus haut.

La pente de notre tangente s'est avérée égale à $2x_0$; ainsi, la dérivée de la fonction $y = x^2$ vaut

$$k(x) = 2x.$$

Voyons comment travaille la méthode proposée en cas de la fonction $y = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme du n-ième degré :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n. \qquad (13)$$

Menons une sécante par le point (x_0, y_0) en lequel on demande de construire la tangente, et un point $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ qui en est proche, les deux points appartenant à notre courbe. On a :

$$y_0 + \Delta y = P(x_0 + \Delta x) = x_0 + a_1 (x_0 + \Delta x) + \\ + \ldots + a_n (x_0 + \Delta x)^n. \qquad (14)$$

Désignons par ε_1 toute somme de termes contenant Δx à une puissance d'exposant un ou plus, par ε_2 toute somme de termes contenant Δx à une puissance d'exposant deux ou plus.

Comme

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n,$$

en ouvrant les parenthèses d'après la formule de Newton *) et en soustrayant (13) de (14), on trouve

$$\Delta y = (a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1}) \Delta x + \varepsilon_2. \qquad (15)$$

Ensuite, la pente de la sécante s'obtient en divisant Δy par Δx. Comme $\varepsilon_2 : \Delta x = \varepsilon_1$: elle s'exprime comme suit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1} + \varepsilon_1.$$

---

*) Formule de Newton: pour tout k et pour tous u, v, on a:

$$(u+v)^k = u^k + \frac{k}{1} u^{k-1} v + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} u^{k-2} v^2 + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{k-3} v^3 + \ldots \\ \ldots + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} u^2 v^{k-2} + \frac{k}{1} u v^{k-1} + v^k.$$

L'équation complète de la sécante est :

$$y = (a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + na_nx_0^{n-1} + \varepsilon_1)(x - x_0) + y_0.$$

Lorsque nous posons $\Delta x = 0$, ε_1 s'annule et nous arrivons à l'équation de la tangente

$$y_{\tan} = (a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + na_nx_0^{n-1})(x - x_0) + y_0.$$

Ainsi nous obtenons l'expression suivante pour la pente de la tangente :

$$k = a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + na_nx_0^{n-1}. \qquad (16)$$

La valeur de k, lorsque x_0 est fixe, est un nombre ; si nous faisons varier x_0, ce nombre varie, et nous obtenons une fonction qui fournit les valeurs de la pente des tangentes à la courbe $y = P(x)$ en ses points différents. Comme nous avons dit, cette fonction est la dérivée de $P(x)$; elle est désignée par $P'(x)$. La formule obtenue se met sous la forme :

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}. \qquad (16')$$

La loi de formation de $P'(x)$ à partir de $P(x)$ est bien simple : dans la somme (13), toute valeur x^k est remplacée par kx^{k-1}.

En particulier, la dérivée d'une constante (i.e. d'une fonction qui prend une même valeur $y = a_0$ pour tous les x) est nulle. D'ailleurs, c'est évident géométriquement : la tangente à la courbe $y = a_0$ est horizontale en tout point.

En revenant au cas général, signalons l'égalité

$$P(x + \Delta x) = P(x) + P'(x)\,\Delta x + \varepsilon_2 \qquad (17)$$

qui résulte de (15).

Plaçons-nous maintenant dans le cas de la fonction rationnelle donnée sous sa forme générale

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (18)$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant des polynômes, et voyons comment se recherche la tangente en un point donné.

En utilisant (17) nous avons

$$y_0 + \Delta y = \frac{P(x_0+\Delta x)}{Q(x_0+\Delta x)} = \frac{P(x_0)+P'(x_0)\,\Delta x+\varepsilon_2}{Q(x_0)+Q'(x_0)\,\Delta x+\varepsilon_2}. \qquad (19)$$

En soustrayant (18) de (19) on trouve

$$\Delta y = \frac{P(x_0)+P'(x_0)\,\Delta x+\varepsilon_2}{Q(x_0)+Q'(x_0)\,\Delta x+\varepsilon_2} - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} =$$

$$= \frac{[P'(x_0)\,Q(x_0)-Q'(x_0)\,P(x_0)]\,\Delta x+\varepsilon_2}{Q(x_0)\,[Q(x_0)+Q'(x_0)\,\Delta x+\varepsilon_2]}. \qquad (20)$$

Par conséquent, la pente de la sécante vaut

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0)-Q'(x_0)\,P(x_0)+\varepsilon_1}{Q^2(x_0)\,\varepsilon_1}. \qquad (21)$$

L'équation complète de la sécante s'écrit

$$y = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0)-Q'(x_0)\,P(x_0)+\varepsilon_1}{Q^2(x_0)\,\varepsilon_1}(x-x_0)+y_0.$$

Supposons que $Q(x_0) \neq 0$. En posant $\Delta x = 0$, nous arrivons à l'équation de la tangente:

$$y_{\tan} = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0)-Q'(x_0)\,P(x_0)}{Q^2(x_0)}(x-x_0)+y_0.$$

La pente de la tangente pour $x = x_0$ se trouve égale à

$$y'(x_0) = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0)-Q'(x_0)\,P(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

La formule obtenue donne une règle de calcul de la dérivée d'un quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q-Q'P}{Q^2}. \qquad (22)$$

Considérons quelques exemples d'application des règles mentionnées.

1. Quels sont deux nombres positifs dont la somme vaut c et dont le produit est maximal possible?

Ce problème admet une résolution algébrique élémentaire. Sans y insister, appliquons notre méthode générale. Notant l'un des nombres cherchés par x et l'autre par $c - x$, nous voyons qu'il s'agit de trouver le maximum de la fonction

$$P(x) = x(c - x) = -x^2 + cx.$$

Nous avons

$$P'(x) = -2x + c.$$

En l'égalant à zéro, nous trouvons la solution:

$$x = c/2, \quad c - x = c/2.$$

Le problème suivant qui ressemble formellement au précédent n'a plus de résolution élémentaire.

2. Quels sont deux nombres positifs dont la somme vaut c et le produit du cube du premier par le carré du second est le plus grand possible?

Ici il s'agit du maximum de la fonction

$$P(x) = x^3(c - x)^2 = x^5 - 2cx^4 + c^2x^3.$$

Nous savons qu'à un point du maximum la dérivée d'une fonction s'annule.

Calculons la dérivée

$$P'(x) = 5x^4 - 8cx^3 + 3c^2x^2.$$

En l'égalant à zéro nous obtenons de toute évidence la solution $x = 0$. En cherchant des solutions $x \neq 0$ nous avons à résoudre l'équation du second degré

$$5x^2 - 8cx + 3c^2 = 0.$$

Elle a pour solutions

$$x_{1.2} = \frac{4c \pm \sqrt{16c^2 - 15c^2}}{5} = \frac{4c \pm c}{5}.$$

Ainsi, la tangente au graphique de la fonction $y = P(x)$ est horizontale aux points $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{5}c$, $x_3 = c$. Les

valeurs x_1 et x_3 annulent la fonction $P(x)$, x_2 lui donne la valeur positive: $P(x_2) = (3/5)^3 (2/5)^2 c^5$. Par conséquent, les nombres cherchés sont $x_2 = 3c/5$, $c - x_2 = 2c/5$.

3. Quel est l'angle formé par l'axe des x avec la courbe $y = P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ (cf. fig. 21)? Naturellement, nous entendons par là l'angle formé par l'axe des x et la tangente à la courbe au point d'intersection.

● SOLUTION. En nous débarrassant de parenthèses nous avons

$$y = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

d'où, d'après la formule (16'):

$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6.$$

La courbe $y = P(x)$ coupe l'axe des x aux points 0, 1, 2 et 3. Les substitutions successives donnent

$$y'(0) = -6,\ y'(1) = 2,\ y'(2) = -2,\ y'(3) = 6.$$

Ces nombres représentent les pentes des tangentes à la courbe donnée en des points d'intersection, c'est-à-dire les tangentes trigonométriques des angles cherchés.

4. En quels points la tangente à la courbe du problème 3 est horizontale?

La pente de la tangente en tout point où elle est horizontale est nulle. En égalant la dérivée de $P(x)$ à zéro nous arrivons à l'équation

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0.$$

Un coup d'œil sur la figure 21 suffit pour s'assurer que cette équation possède la solution $x_1 = 3/2$ (en raison de la symétrie de la courbe). En mettant en facteur $x - 3/2$ nous avons

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 4(x - 3/2)(x^2 - 3x + 1).$$

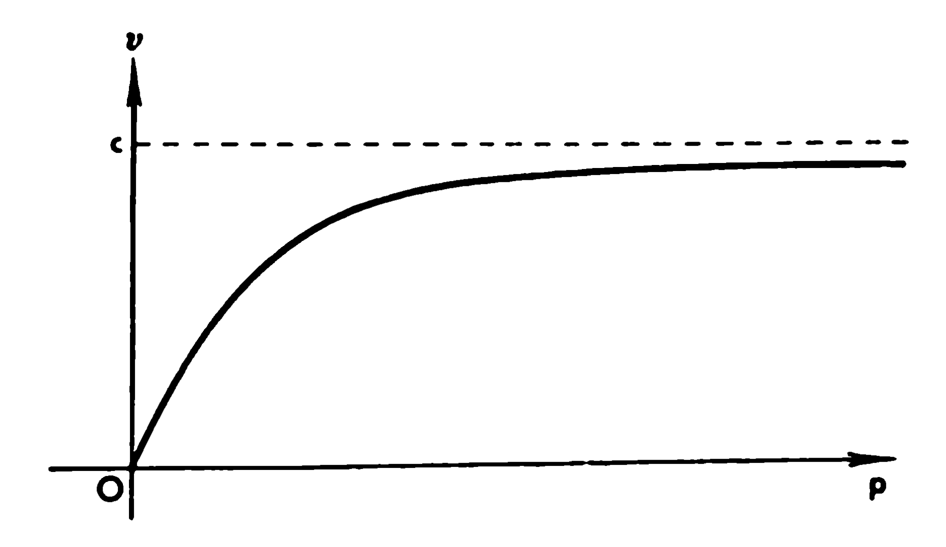


Fig. 41

Il reste à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 3x + 1 = 0$. Nous avons

$$x_{2.3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 1,5 \pm 1,118 \ldots$$

Les ordonnées correspondantes sont faciles à calculer:

$$y_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16},$$

$$y_{2.3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{1}{16} (5 - 9)(5 - 1) = -1.$$

5. Soit la formule de la vitesse v d'un bateau l'exprimant en fonction des dépenses horaires du combustible p (en roubles)

$$v = c \frac{p}{p+1}. \qquad (23)$$

Cette formule est illustrée par le graphique (fig. 41). Le graphique est construit à la base de cette supposition naturelle que d'abord, lorsque les dépenses du combustible sont relativement petites, la vitesse du bateau croît proportionnellement aux dépenses; ensuite la croissance de la vitesse ralentit, et aucune dépense de combustible ne peut faire marcher le bateau à la vitesse supérieure à une vitesse limite c.

En plus des frais de combustible, il y a des frais généraux constants qui font q roubles à l'heure. Quelle doit être la vitesse d'un trajet de s km pour que le coût total du voyage soit minimal?

● SOLUTION. Soient v la vitesse, $T = s/v$ la durée du trajet. Les frais de combustible à l'heure s'obtiennent en inversant la formule (23):

$$p = \frac{v}{c-v}, \tag{24}$$

et les frais de combustible totaux P s'en déduisent en multipliant par la durée $T = s/v$: $P = \frac{s}{c-v}$. Le total des frais généraux constants Q est $qT = q\frac{s}{v}$. Le total de toutes les dépenses fait

$$R = P + Q = \frac{s}{c-v} + q\frac{s}{v} = s\left(\frac{1}{c-v} + \frac{q}{v}\right). \tag{25}$$

Le graphique de cette fonction a la forme montrée sur la figure 42. Pour trouver la vitesse v correspondant aux dépenses minimales nous égalons à zéro la dérivée de R par rapport à v:

$$R'(v) = s\left(\frac{1}{(c-v)^2} - \frac{q}{v^2}\right) = 0.$$

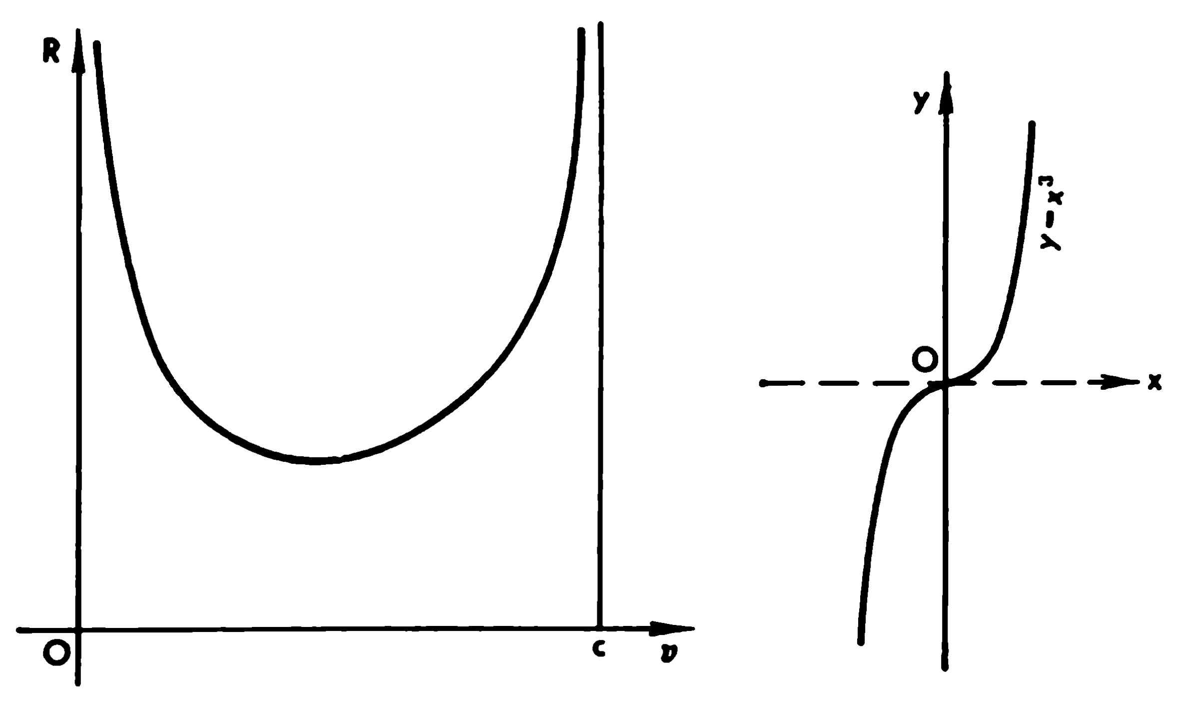


Fig. 42 Fig. 43

Il en résulte

$$v^2 - q(c-v)^2 = 0, \quad v^2 = q(c-v)^2,$$

$$v = \sqrt{q}(c-v) = \sqrt{q}c - \sqrt{q}v\ ^{*}),$$

$$v = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}} c \text{ km/heure.} \tag{26}$$

En portant (26) dans (25) nous trouvons également les dépenses totales pour le voyage le plus économique :

$$R = \frac{1}{c}(1+\sqrt{q})^2.$$

6. Quelle est la tangente à la courbe $y = x^3$ pour $x = 0$?

Nous avons $y' = 3x^2$; donc, pour $x = 0$, évidemment $y' = 0$, de sorte que la tangente se confond avec l'axe des x (fig. 43).

---

*) Nous avons rejeté la solution qui correspond à l'équation

$$v = -\sqrt{q}(c-v)$$

comme dépourvue de sens puisque le second membre est négatif ($v < c$).

Nous voyons que, dans le présent cas, la tangente passe d'un côté de la courbe à l'autre: pour $x > 0$ la courbe est au-dessus de la tangente; pour $x < 0$, au-dessous. Les points d'un graphique en lesquels la tangente passe d'un côté de la courbe à l'autre s'appellent *points d'inflexion* (fig. 44). Ainsi, la même valeur $x = 0$ détermine un point d'inflexion pour les courbes

$$y = Cx^3 + x,$$

les valeurs de C étant différentes (fig. 45).

En effet, nous avons $y'(0) = 1$, de sorte que l'équation de la tangente menée par le point (0, 0) a la forme

$$y_{tan} = x;$$

donc la différence

$$y - y_{tan} = Cx^3$$

change de signe en passant des valeurs négatives de x aux valeurs positives.

Comment trouver les points d'inflexion d'une fonction $y = f(x)$ donnée?

La figure 45 montre que si, x étant croissant, la courbe change la position « au-dessous de la tangente » pour la position « au-dessus de la tangente », son coefficient angulaire $y'(x)$, des deux côtés du point de tangence, est plus grand qu'en ce point même:

$$y'(x) > y'(x_0),$$
$$x \neq x_0.$$

D'une façon analogue, si, x étant croissant, la courbe passe de la position « au-dessus de la tangente » à la position « au-dessous de la tangente », alors $y'(x)$, des deux côtés du point de tangence, est plus petit qu'en ce point même:

$$y'(x) < y'(x_0),$$
$$x \neq x_0.$$

Dans le premier cas, le point d'inflexion est un point de minimum local de la fonction $y'(x)$, dans le second, celui

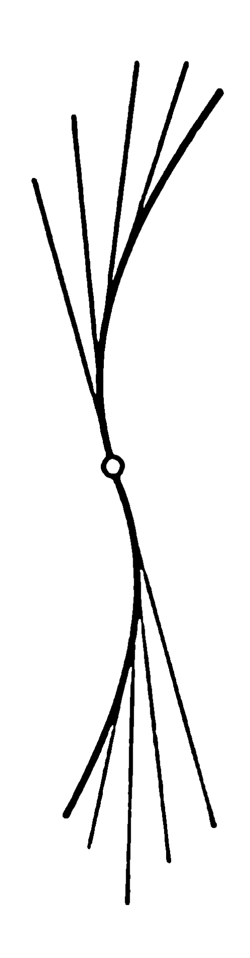


Fig. 44

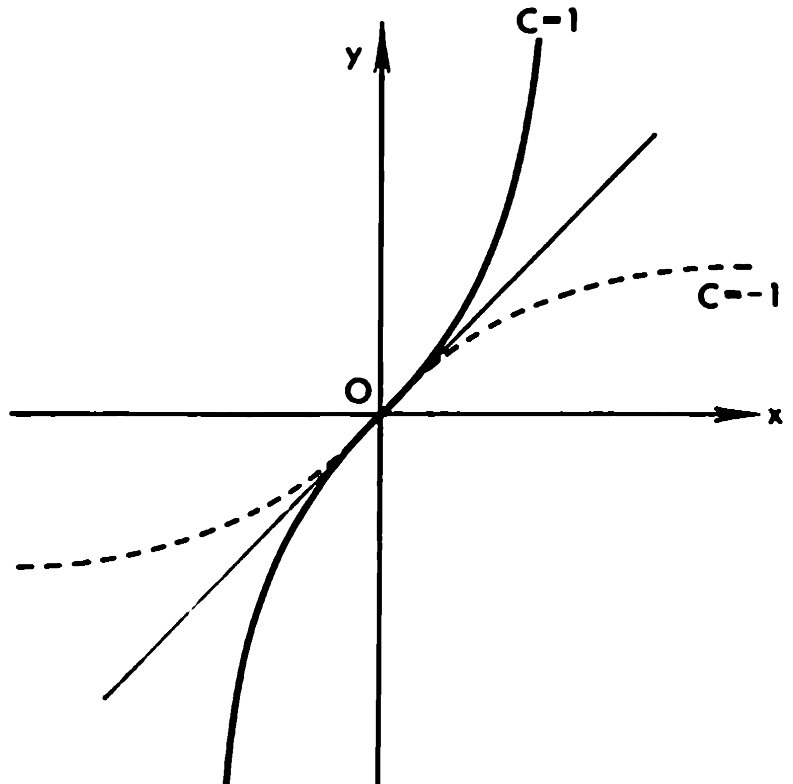


Fig. 45

de maximum local de cette fonction. Pour trouver ces points, nous avons d'abord à calculer la dérivée de la fonction $y'(x)$. Cette dérivée $(y'(x))'$ s'appelle *dérivée seconde* de la fonction $y(x)$ et se note $y''(x)$. Nous avons ensuite à trouver les solutions de l'équation

$$y''(x) = 0,$$

solutions, parmi lesquelles on trouve les abscisses de tous les points d'inflexion cherchés. (Il peut y avoir des solutions « parasites » qui ne déterminent pas de points d'inflexion; bien entendu que de telles solutions sont à rejeter *).)

7. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ (fig. 46).

Le dessin nous suggère qu'il doit y en avoir deux, qui sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Trouvons-les en appliquant la règle décrite.

Nous avons

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$y'' = (y')' = -\frac{(1+x^2)^2 2 - 2x(4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

En égalant à zéro l'expression obtenue nous trouvons deux solutions:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,577 \ldots$$

Nous voyons que le calcul différentiel permet de résoudre par une méthode générale toute une série de problèmes dépassant les possibilités des mathématiques élémentaires.

---

*) Ainsi, pour la fonction $y = x^4$ nous avons

$$y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2;$$

pour $x = 0$

$$y''(x) = 0;$$

cependant, ce n'est pas un point d'inflexion de la courbe $y = x^4$.

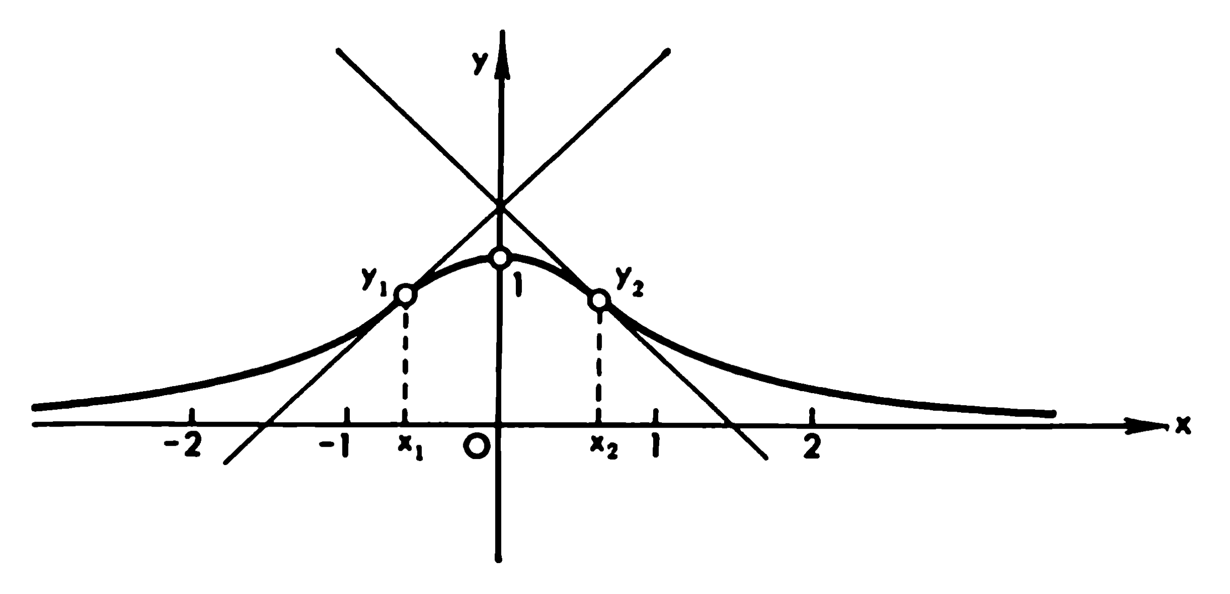


Fig. 46

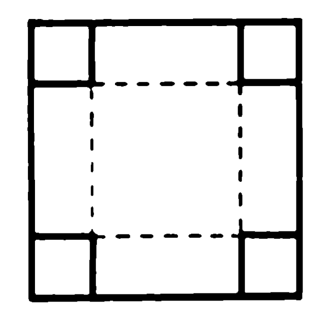


Fig. 47

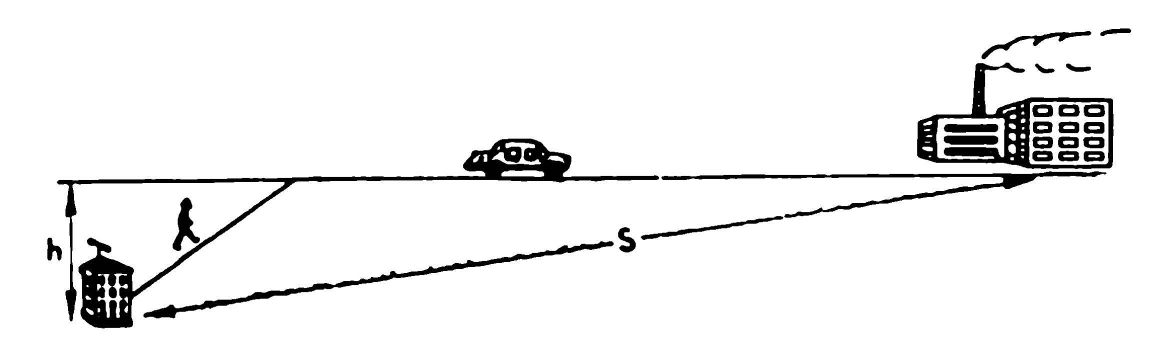


Fig. 48

Exercices

2.1. Trouver le rapport de la hauteur d'une boîte à conserves (cylindrique), de volume donné, au diamètre de sa base, pour lequel les besoins en métal soient minimaux.

2.2. Aux quatre angles d'une feuille de fer en forme d'un carré on découpe quatre petits carrés, puis on plie la feuille suivant le pointillé (fig. 47) en la transformant ainsi en une boîte ouverte. Quelles doivent être les dimensions des petits carrés pour que le volume de la boîte soit maximal?

2.3. Sachant que la dérivée de la fonction $y = \sqrt{f(x)}$ a pour expression

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

résoudre le problème suivant.

Ma maison est à h km d'une route (droite) (fig. 48) menant à la ville qui est à s km de ma maison en ligne droite. S'il me faut aller en ville je marche à pied jusqu'à la route, puis je prends une auto. A pied je fais u km à l'heure, en voiture, v km à l'heure. Quel est l'itinéraire le plus rapide?

2.4. Quel est le secteur que l'on doit découper dans un cercle de rayon R pour en confectionner un entonnoir du plus grand volume possible?

On peut trouver un grand nombre d'exercices sur les dérivées et leurs applications dans des recueils courants.

3. LES PRIMITIVES

Qu'est-ce qu'on doit appeler *aire* d'une figure plane limitée, en général, par un contour curviligne? Nous partons des hypothèses suivantes:

1. L'aire d'un rectangle de dimensions a et b vaut ab.
2. Les aires de deux figures *égales* (i.e. que l'on peut faire coïncider en superposant) sont égales.

3. Si une figure Φ est partagée en quelques figures $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, son aire vaut la somme des aires des figures $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

Il en résulte que les aires des figures composées des mêmes figures sont égales. Ensuite, un triangle de base a et de hauteur h peut être coupé en les parties dont on peut composer un rectangle de côtés $a/2$ et h (fig. 49) ; par conséquent, l'aire du triangle vaut $ha/2$. Enfin, l'aire de tout polygone peut être obtenue comme somme des aires des triangles qui le composent (fig. 50).

4. L'aire d'une figure Φ de forme quelconque est plus petite que celle de n'importe quel polygone qui la contient et plus grande que celle de n'importe quel polygone intérieur (fig. 51).

Il existe un théorème qui dit qu'*à toute figure plane Φ limitée par un contour qui n'est pas trop compliqué, on peut faire correspondre, et cela d'une façon unique, un nombre $S(\Phi)$ appelé aire de la figure Φ, de sorte que les conditions 1 à 4 soient vérifiées.* (L'énoncé rigoureux et la démonstration de ce théorème sont trop compliqués pour les donner ici; on peut les trouver dans le livre de Lebesgue « Sur la mesure des grandeurs ».

De toute façon, l'aire au sens indiqué existe pour toute figure dont le contour est composé d'arcs finis des graphiques de fonctions rationnelles. En acceptant le théorème cité, voyons comment on calcule l'aire d'une figure Φ (trapèze curviligne) limitée du bas par un segment de l'axe des x, de $x = a$ à $x = b$, du haut par une courbe $y = f(x)$ (comme toujours, $f(x)$ est une fonction rationnelle), des côtés par les droites parallèles à l'axe des y et passant par les points $x = a$, $x = b$ (fig. 52).

Choisissons un nombre x_0 dans l'intervalle a, b et proposons-nous de rechercher l'aire de la figure $\Phi(x_0)$ qui diffère de la figure Φ par la position de sa limite droite qui passe dans le cas considéré non pas par le point b mais par le point x_0. La valeur de l'aire dépend du choix de x_0, i.e. est une

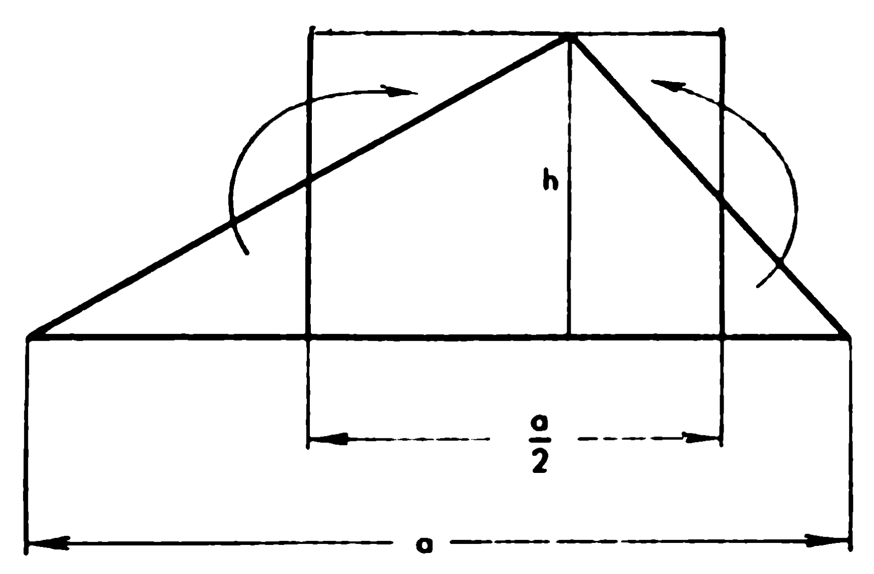


Fig. 49

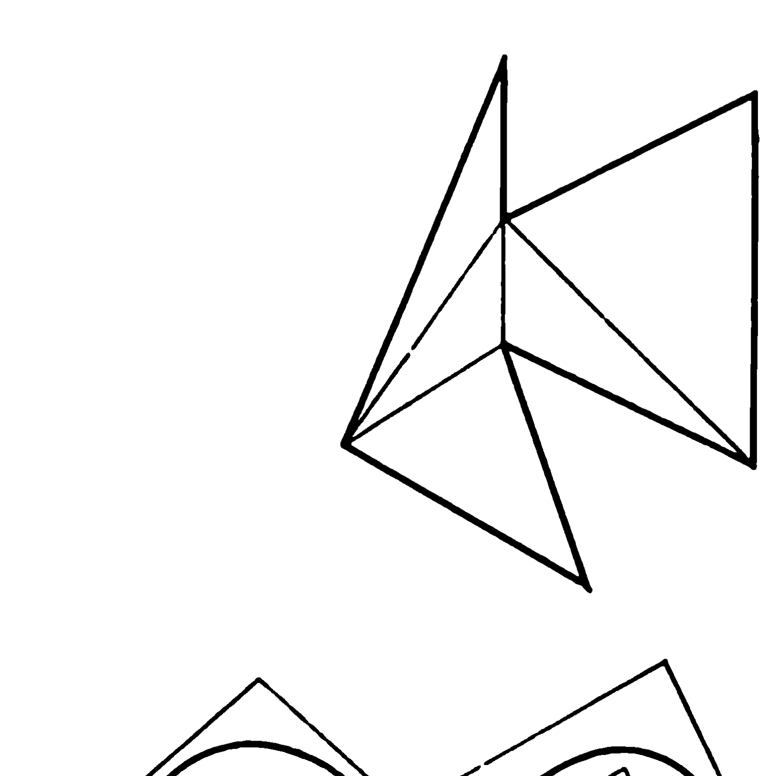


Fig. 50

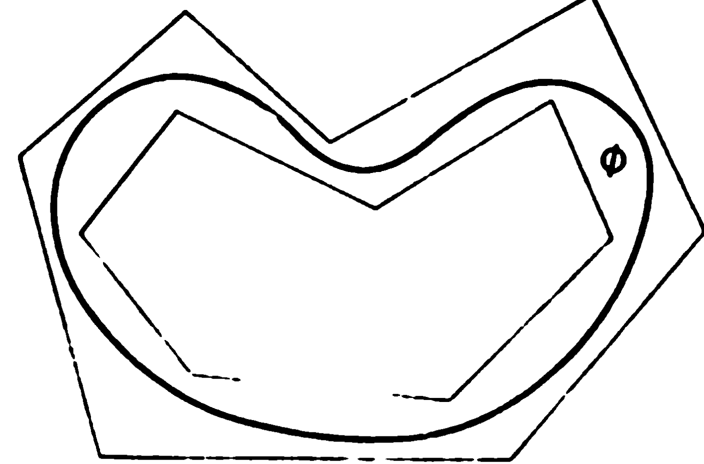


Fig. 51

fonction de x_0 définie sur tout l'intervalle $a \leqslant x_0 \leqslant b$; nous désignons ladite fonction par $S(x_0)$. Evidemment, $S(a) = 0$ et $S(b)$ est l'aire cherchée de la figure Φ. On peut ébaucher le graphique de cette fonction ; dans le présent cas, il va comme montré sur la figure 53.

En donnant à l'abscisse droite x_0 un accroissement $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, on obtient l'accroissement correspondant de l'aire : $ABDEC = \Delta S$ (fig. 54), qui se trouve en additionnant l'aire du rectangle $ABDC$ égale à $y \, \Delta x_0$ et celle du triangle curviligne CDE. La dernière ne dépasse pas $\Delta y \cdot \Delta x_0$ *) et peut donc, conformément à ce qui précède, être désignée par $\varepsilon_1 \Delta x_0$.

Ainsi on a

$$S(x_1) - S(x_0) = (y + \varepsilon_1) \, \Delta x_0.$$

L'équation de la sécante du graphique $y = S(x)$ menée par les points $[x_0, \; S(x_0)]$ et $[x_1, \; S(x_1)]$ s'écrit :

$$y - S(x_0) = \frac{S(x_1) - S(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) = [y(x_0) + \varepsilon_1] (x - x_0).$$

En y posant $x_1 = x_0$ nous obtenons comme plus haut l'équation de la tangente à la courbe $y = S(x)$ au point $(x_0, \; y_0)$:

$$y - S(x_0) = y(x_0)(x - x_0).$$

La pente de la tangente se trouve égale à $y(x_0)$. Or, la pente de la tangente à la courbe $y = S(x)$ au point d'abscisse x_0 est, nous le savons, la dérivée de la fonction $S(x)$ pour $x = x_0$. Ainsi, nous aboutissons à l'égalité :

$$S'(x_0) = y(x_0).$$

Par conséquent, *pour trouver la fonction* $S(x)$, *il faut trouver une fonction dont la dérivée est* $y(x)$, c'est-à-dire effectuer

---

*) Nous supposons que la fonction y croît (ou décroît) sur l'intervalle de x_0 à x_1 ; pour une fonction rationnelle on peut toujours choisir cet intervalle autant petit qu'il faut pour que la condition de monotonie soit satisfaite.

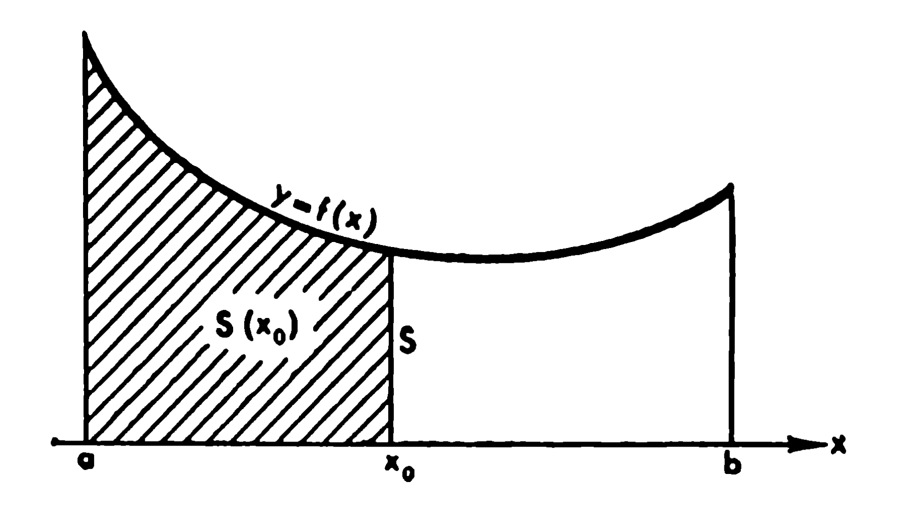


Fig. 52

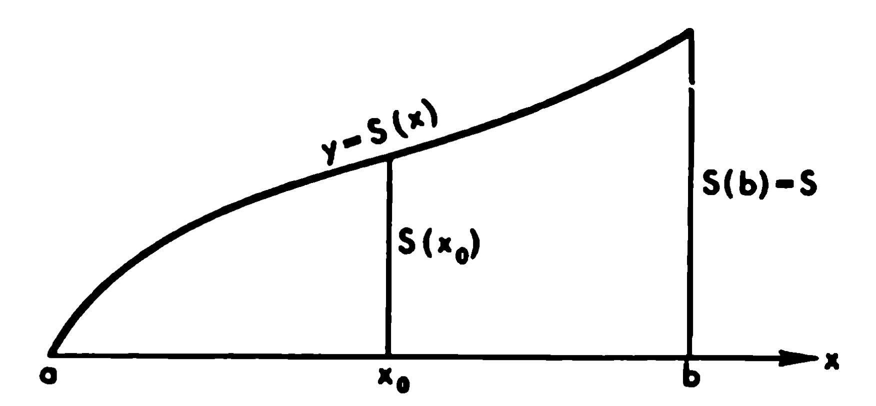


Fig. 53

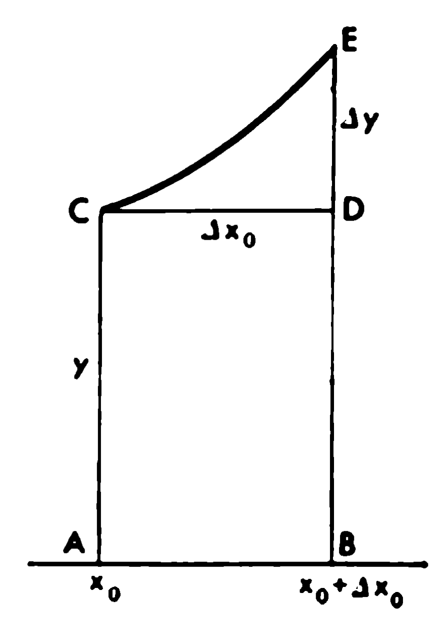


Fig. 54

sur la fonction $f(x)$ une opération inverse à la dérivation. Toute fonction $F(x)$ dont la dérivée est $y(x)$ s'appelle *primitive de* $y(x)$. Notons que, lorsque l'une des primitives $F(x)$ de la fonction $y(x)$ est trouvée, toute fonction de la forme $F(x) + C$ (C est une constante) est encore une primitive de $y(x)$ puisque *la dérivée d'une constante est nulle.* Nous avons vu que la fonction cherchée $S(x)$ s'annule pour $x = a$. C'est pourquoi, après avoir trouvé une primitive $F(x)$, on peut écrire l'équation suivante pour la constante C:

$$S(a) = F(a) + C = 0, \text{ d'où } C = -F(a).$$

Définitivement, une primitive $F(x)$ trouvée, nous avons la solution du problème posé sous la forme

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

et, en particulier,

$$S(b) = F(b) - F(a), \tag{27}$$

ce qui réduit le problème à la recherche d'une primitive de la fonction donnée $f(x)$.

Pour appliquer la formule générale (27), il faut savoir trouver les primitives de différentes fonctions. Si la fonction $y = y(x)$ est un polynôme en x

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

on peut immédiatement écrire l'une de ses primitives, à savoir:

$$F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{28}$$

Par conséquent, les aires des figures limitées (du haut) par des courbes de la forme $y = P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme, sont faciles à calculer.

Soit, par exemple, $y = y(x)$ une fonction du premier degré (fig. 55) qui varie de la valeur p à la valeur q sur l'in-

tervalle $a \leqslant x \leqslant b$:

$$y = p + \frac{q-p}{b-a}(x-a).$$

L'une de ses primitives, conformément à (28) est

$$F(x) = px + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{q-p}{b-a}.$$

D'après la formule (27) on obtient

$$S(b) = F(b) - F(a) = pb + \frac{(b-a)(q-p)}{2} - pa =$$

$$= (b-a)\left(p + \frac{q-p}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

ce qui coïncide avec la formule de l'aire d'un trapèze qu'on établit dans la géométrie élémentaire. Les formules pour l'aire d'un rectangle ou d'un triangle (qui sont des cas particuliers d'un trapèze) s'en déduisent facilement ; elles aussi se trouvent être celles de la géométrie élémentaire.

Or, la méthode des primitives permet de calculer les aires d'une quantité de figures non élémentaires. Considérons encore quelques exemples.

1. Calculer l'aire d'un triangle curviligne OAB (fig. 56) borné par l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant a$ de l'axe des x, l'ordonnée $x = a$ et la courbe $y = Cx^n$.

Une primitive de la fonction $y = x^n$ s'écrit

$$F(x) = x^{n+1}/(n+1)$$

donc, d'après la formule (27), on a :

$$S(a) = C\frac{a^{n+1}}{n+1} - C\frac{0^{n+1}}{n+1} = C\frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a \cdot Ca^n}{n+1}.$$

Le nombre Ca^n est la longueur du segment AB. Ainsi, l'aire cherchée $S(a)$ fait $1/(n+1)$ de l'aire du rectangle circonscrit $OABC$.

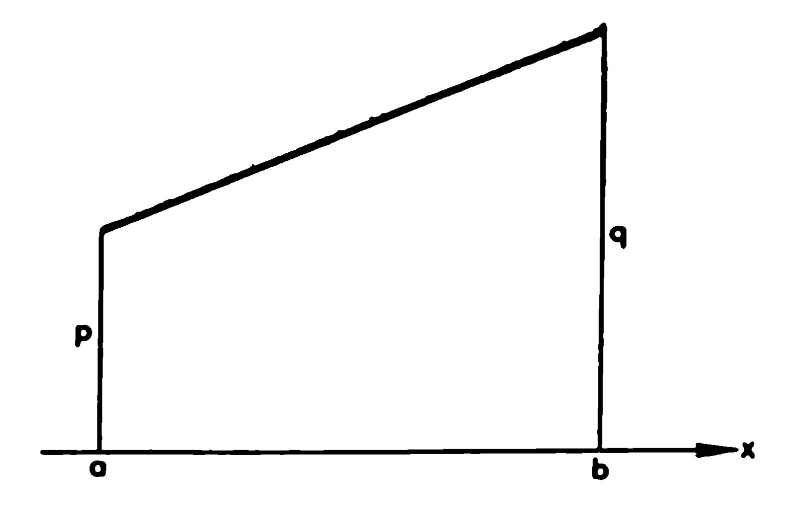


Fig. 55

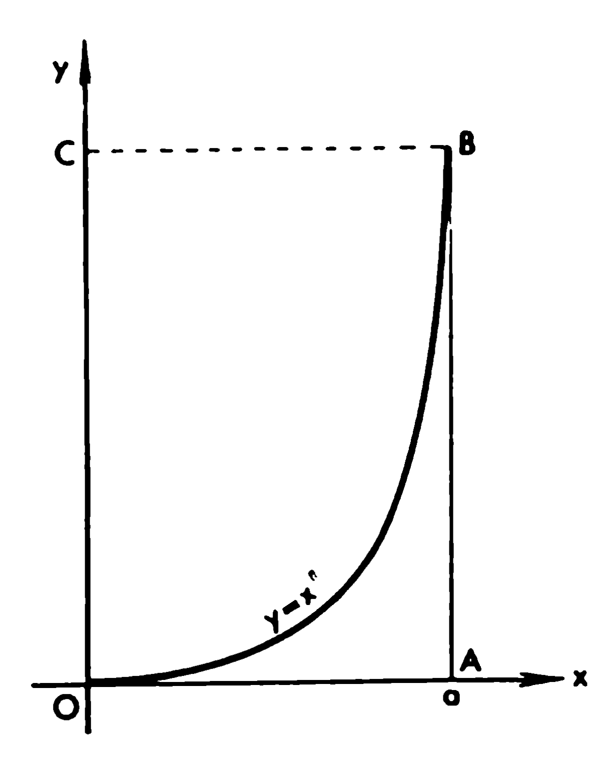


Fig. 56

2. Calculer les aires S_1, S_2, S_3 (fig. 57) limitées par la courbe $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$ et les portions de l'axe des x de 0 à 1, de 1 à 2 et de 2 à 3 respectivement.

Ici nous avons

$$y = P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

et l'une des primitives est

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}.$$

Il en résulte:

$$S_1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{19}{30}$$

Le signe « — » signifie que l'aire S se trouve sous l'axe des x. De même

$$S_2 = F(2) - F(1) = \frac{32}{5} - 24 + \frac{88}{3} - 12 + \frac{19}{30} = \frac{11}{30},$$

et

$$S_3 = F(3) - F(2) = \frac{243}{5} - \frac{243}{2} + 99 - 27 + \frac{4}{15} = -\frac{19}{30}.$$

Le dernier résultat est identique à S_1 ce qu'on aurait pu prévoir pour la raison de symétrie.

3. Calculer l'aire S (fig. 58) limitée par la courbe $y = \frac{1}{x}$ et les droites $x = 1$ et $x = N$ ou N est un grand nombre.

Evidemment, $F(x) = -(1/x)$ est une primitive de $y(x) = 1/x^2$, et nous trouvons

$$S = F(N) - F(1) = 1 - 1/N. \tag{29}$$

Il est à noter que cette aire est toujours plus petite que 1, aussi grand que soit N. La formule (29) montre qu'il est naturel d'associer à la figure infiniment longue qui est bornée par l'axe des x en bas, la courbe $y = 1/x^2$ en haut, le segment de droite $x = 1$ à gauche et qui est illimitée à droite, une aire finie, à savoir 1.

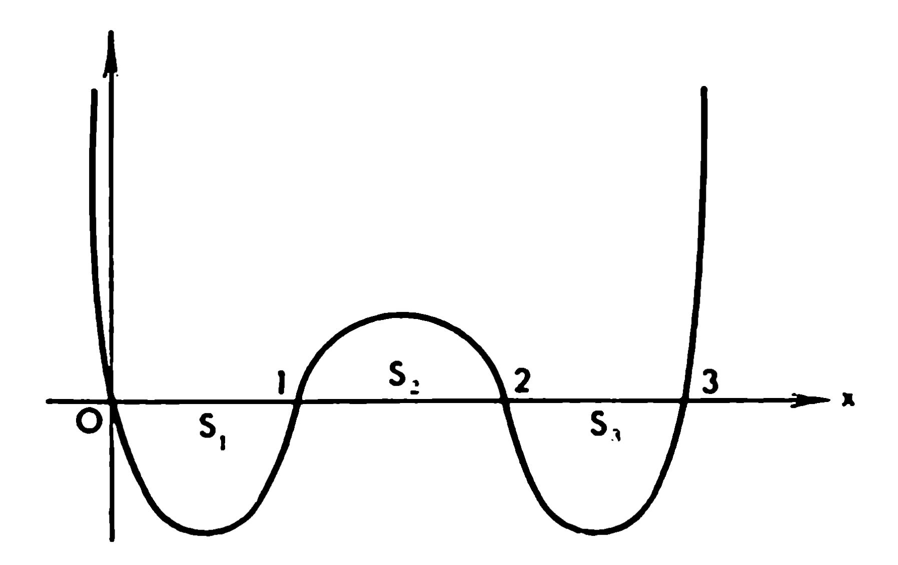


Fig. 57

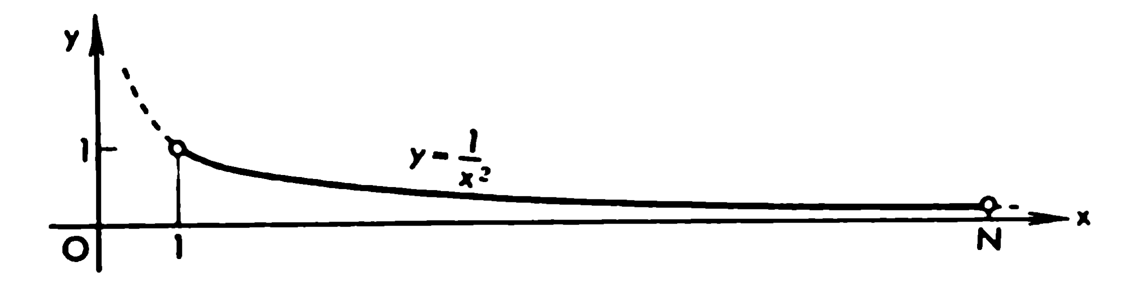


Fig. 58

Nous voyons que le calcul des primitives basé sur le calcul des dérivées fournit une méthode universelle de la résolution d'une série de problèmes sur les aires qui sont inaccessibles pour les mathématiques élémentaires. Il y a lieu de noter que le calcul d'une aire est un problème particulier, ce n'est que l'une des réalisations du problème général de la recherche d'une primitive d'après sa dérivée. Il y a une quantité de problèmes mathématiques, mécaniques, physiques, chimiques et biologiques qui se réduisent à ce problème général; le calcul des primitives permet d'appliquer un même procédé à la résolution d'un tas de problèmes qui ont les formes concrètes les plus diverses mais un même fond mathématique (par exemple, le calcul de l'énergie qu'il faut dépenser pour mettre un spoutnik sur son orbite; la recherche de la loi de désintégration radio-active; l'analyse quantitative de la marche d'une réaction chimique ou de la scissiparité de bactéries). Sans pouvoir nous arrêter sur ces applications attrayantes, nous conseillons au lecteur débutant le livre de H. Philips « Equations différentielles » où il trouvera un grand nombre de problèmes se rapportant à de différentes branches de la science et de la technique et se résolvant à l'aide du calcul des primitives.

4. L'exemple suivant exige une attention particulière. Il s'agit de l'aire sous la même courbe $y = 1/x^2$ entre les droites $x = a$ et $x = b > a$ (fig. 59). A l'aide du même procédé, nous aboutissons au résultat :

$$S = F(b) - F(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Si a et b sont de même signe, le résultat est positif, d'ailleurs on pouvait s'y attendre puisque la courbe $y = 1/x^2$ se trouve au-dessus de l'axe des x. Et si a et b sont de signes opposés, $a < 0$, $b > 0$, le résultat est négatif ce qui est frappant et ne colle nullement avec l'image géométrique. Cette contradiction est due à l'application formelle, non critique de la règle (27). En réalité, la règle (27) n'est applicable que dans

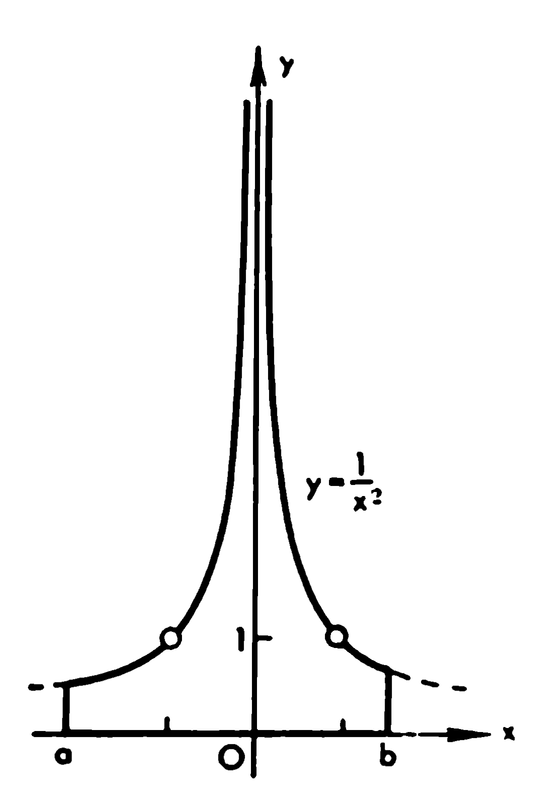


Fig. 59

certaines conditions, sous certaines réserves sans lesquelles elle n'a plus de valeur ; malheureusement, il nous est même impossible de formuler ici lesdites conditions, car elles se basent sur certaines notions générales inconnues au lecteur.

D'une façon générale, en considérant plus attentivement le calcul des primitives de fonctions rationnelles nous y trouvons quelques lacunes. En effet, on peut trouver les primitives de certaines fonctions rationnelles à l'aide de l'égalité

$$\left(\frac{1}{(x-a)^m}\right)' = -\frac{m}{(x-a)^{m+1}}$$

qui se déduit de la formule générale (22). Ainsi, une primitive de l'expression

$$y(x) = \frac{b_1}{(x-a_1)^2} + \frac{b_2}{(x-a_2)^3} + \ldots + \frac{b_m}{(x-a_m)^{m+1}} \qquad (30)$$

est donnée par la formule :

$$F(x) = -\frac{b_1}{x-a_1} - \frac{b_2}{2(x-a_2)^2} - \dots - \frac{b_m}{m(x-a_m)^m}.$$

Or, on ne peut point dire que toute fonction rationnelle se met sous la forme (30). Par exemple, la méthode décrite ne marche pas pour la recherche des primitives de la fonction $1/x$. En fait, $1/x$ possède une primitive, mais celle-ci n'est pas une fonction rationnelle. En dérivant les fonctions rationnelles nous ne sortons pas de la classe des fonctions rationnelles, tandis que l'opération inverse, la recherche d'une primitive, nous amène inévitablement à des fonctions d'une autre nature. Or, l'étude de ces dernières fonctions exige des méthodes générales et un niveau de technique analytique autres que ceux employés dans le présent aperçu.

C'est pourquoi, pour bien apprendre le calcul des dérivées et des primitives, on doit étudier les chapitres préparatoires de l'analyse traitant des nombres réels, des limites et de la continuité. Ces chapitres représentent une base absolument indispensable qui permet d'utiliser une large classe de fonctions dépassant de loin la classe des fonctions rationnelles que nous avons considérée.

Il existe beaucoup de bons livres exposant les fondements de l'analyse mathématique *). Nous espérons que le lecteur débutant qui s'intéressera aux possibilités du calcul différentiel trouvera un moyen d'approfondir utilement ses connaissances des mathématiques, cette branche de la science qui sert si bien à tous les autres domaines de la connaissance et, par là, à l'humanité toute entière.

---

*) Par exemple : *V. Smirnov*, Cours de mathématiques supérieures, tome I, Editions « Mir », Moscou, 1972.

Exercices

3.1. Calculer l'aire limitée en haut par la courbe $y = x^2 + 1/x^2$, en bas par l'axe des x, à gauche et à droite par les droites verticales coupant l'axe des x aux points $a = 1/2$ et $b = 2$ respectivement (fig. 60).

3.2. Calculer l'aire comprise entre deux courbes (fig. 61) :

$$y = cx^m, \quad x = dy^n.$$

● INDICATION. Utiliser l'exemple 1 du § 3.

3.3. Trouver l'aire limitée en haut par la droite $x + y = 2$ et en bas par la parabole $y = x^2$ (fig. 62).

● INDICATION. Représenter l'aire cherchée comme différence de deux aires limitées à gauche et à droite par des droites verticales.

3.4. La vitesse qu'un corps en chute libre acquiert en t secondes vaut gt ($g = 9{,}81$ m/s²). Quel espace parcourt-il durant ce temps?

● INDICATION. La vitesse est la dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps.

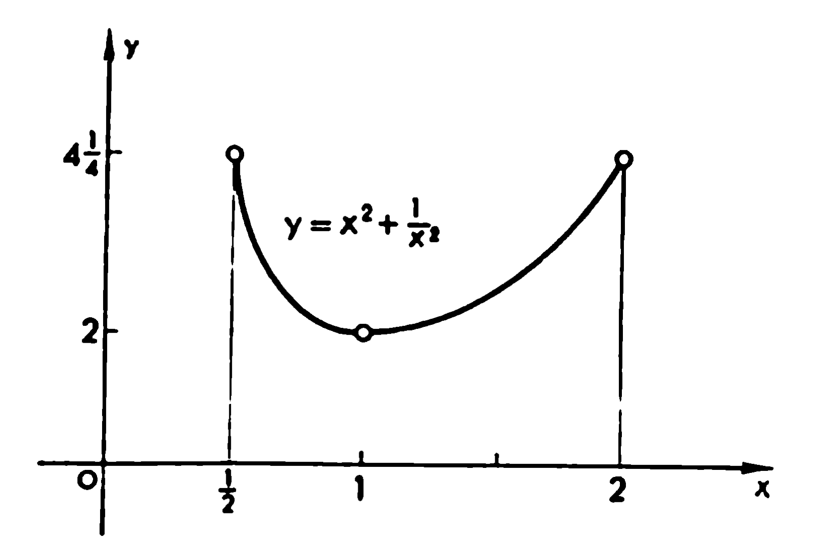


Fig. 60

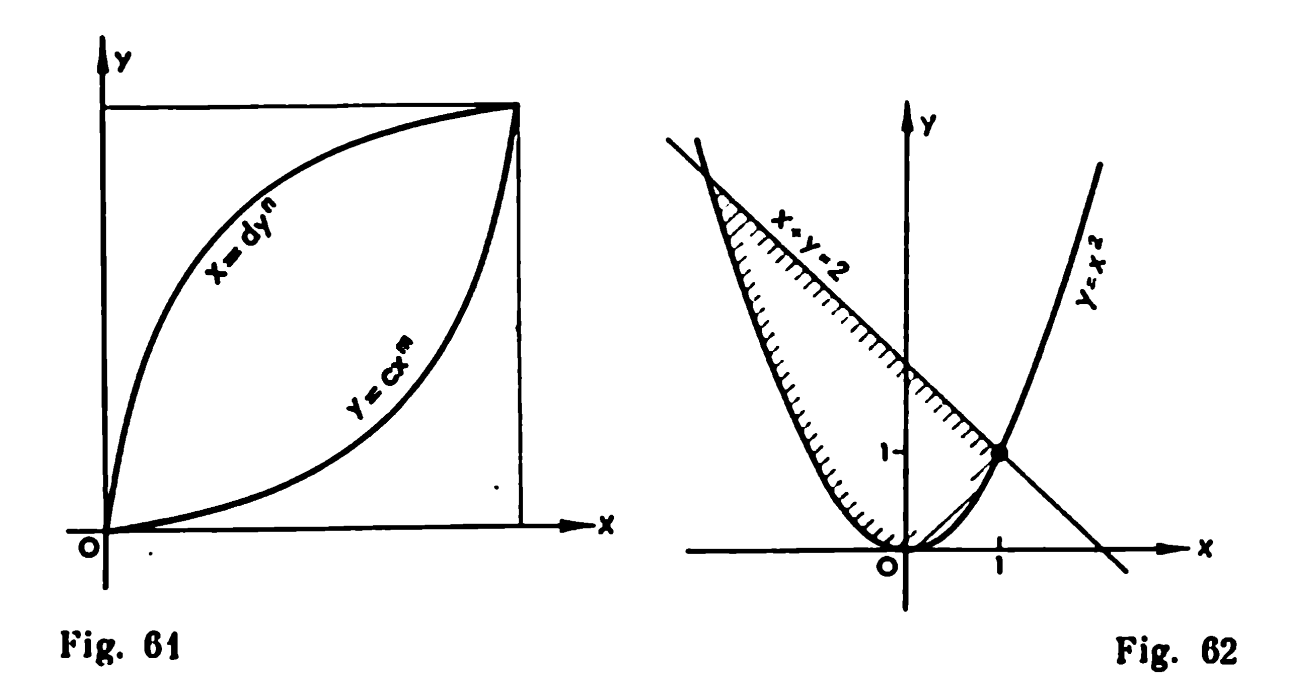
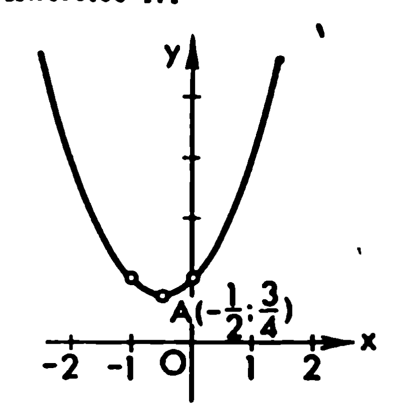


Fig. 61

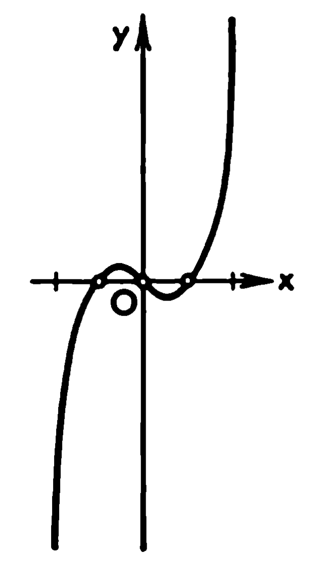
Fig. 62

Réponses

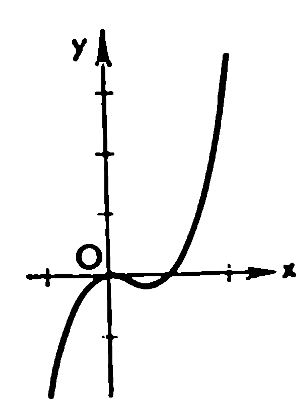
Exercice 1.1



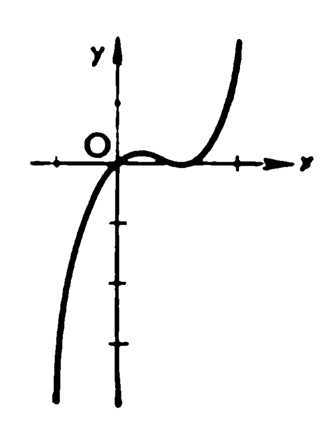
Exercice 1.2



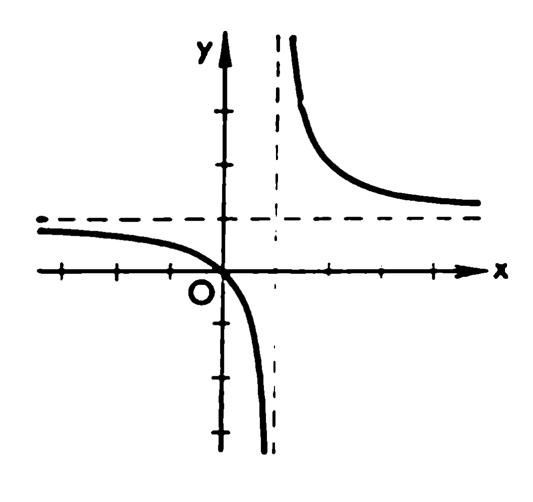
Exercice 1.3



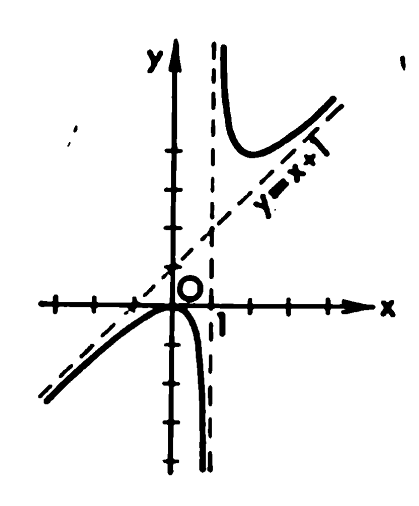
Exercice 1.4



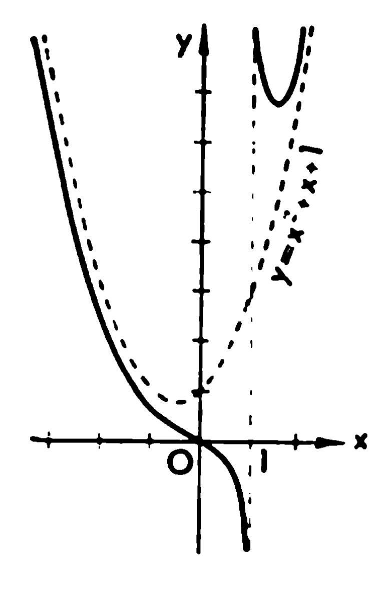
Exercice 1.5



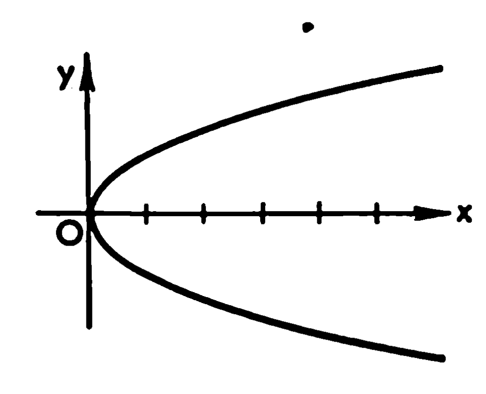
Exercice 1.6



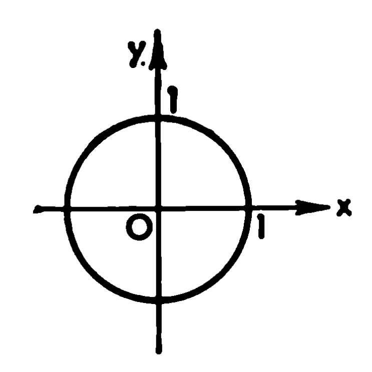
Exercice 1.7



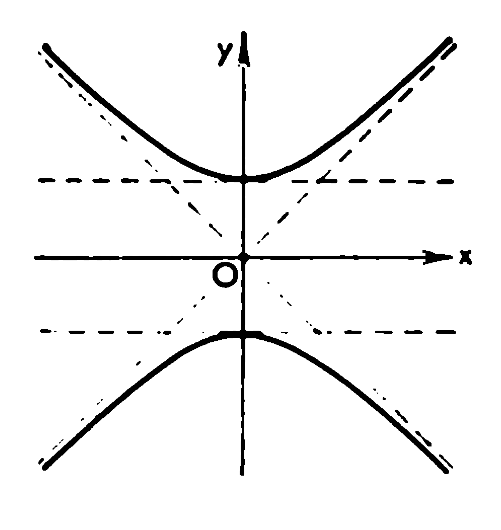
Exercice 1.8



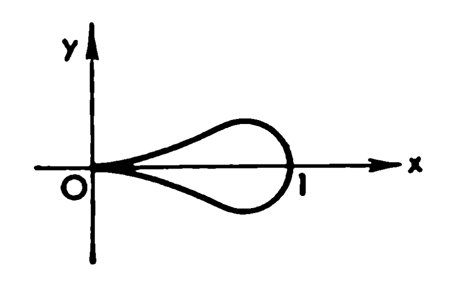
Exercice 1.9



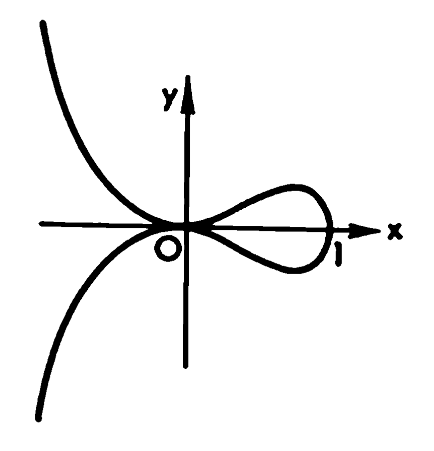
Exercice 1.10

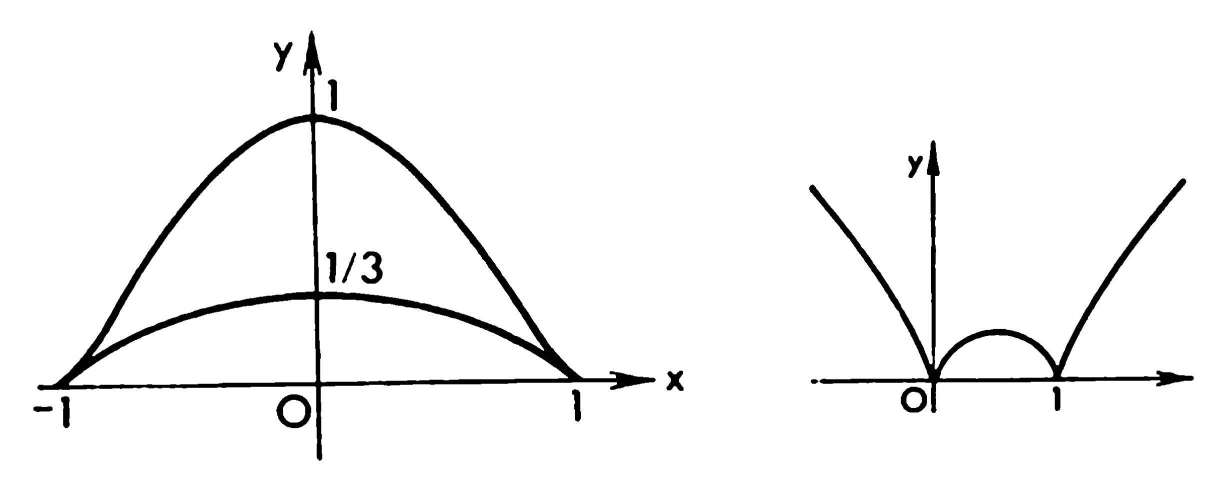


Exercice 1.11



Exercice 1.12





2.1. La hauteur de la boîte est égale au diamètre de sa base.

2.2. Le côté de chaque petit carré fait 1/6 de celui du grand carré.

2.3. Le plus rapide est d'aller à pied dans la direction qui forme avec la perpendiculaire à la route un angle dont le sinus vaut u/v puis prendre une voiture, si seulement

$$\frac{u}{v} \leqslant \sqrt{1-\left(\frac{h}{s}\right)^2}\,;$$

dans le cas contraire il vaut mieux marcher à pied directement jusqu'à la ville.

2.4. $\alpha = 2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ radians ou $\simeq 72°$.

3.1. $S = 33/8$.

3.2. $S = c^{\frac{n+1}{1-nm}} d^{\frac{m+1}{1-nm}}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$.

3.3. $S = 9/2$.

3.4. $s = (gt^2)/2$.

V. Boltianski

QU'EST-CE QUE LA DÉRIVATION?

1. PROBLÈME DE LA CHUTE D'UN CORPS

Position du problème

Le premier problème que nous allons considérer est de *déterminer la vitesse de chute d'un corps tombant d'une certaine hauteur.*

Le cours de physique élémentaire nous apprend qu'un corps qui tombe verticalement dans le vide acquiert t secondes après le début de la chute la vitesse

$$v = v_0 + gt, \tag{1}$$

où v_0 est la vitesse initiale et g l'accélération de la pesanteur.

Lorsque les corps tombent dans l'air (et non dans le vide), la formule (1) peut rester approximativement vraie, mais elle conduit dans certains cas à des erreurs graves. Ainsi, elle est valable pour la chute d'une pierre d'une faible hauteur. Or, si le corps tombe d'une hauteur très grande, sa vitesse peut sensiblement différer de celle donnée par (1). Citons un exemple. En 1945, le parachutiste soviétique Romaniouk effectua un saut à ouverture retardée parcourant en chute libre plus de 12 000 m. Un corps tombant dans le vide d'une telle hauteur (sans vitesse initiale) atteindrait à la surface de la Terre une vitesse d'environ 500 m/s. En effet, il découle de la formule $s = \frac{gt^2}{2}$ que la durée de la chute (dans le vide) est

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 12\,000 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} \approx 49{,}5 \text{ s},$$

et nous trouvons de (1) la valeur de la vitesse :

$$v = gt \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 49{,}5 \text{ s} \approx 485 \text{ m/s}.$$

(On aurait pu utiliser d'emblée la formule $v^2 = 2gs$.) Or, il est connu que la vitesse de chute d'un parachutiste en saut

à ouverture retardée est de 50 à 60 m/s sans atteindre des valeurs supérieures. Dans notre cas, la formule (1) conduit donc à un résultat faux.

Et voici un autre exemple. Le mécanisme du parachute est conçu de façon qu'après son ouverture l'homme descend à une vitesse d'environ 6,5 m/s quelle que soit la hauteur de laquelle il a sauté.

La formule (1) se révèle inapplicable une fois de plus.

On est donc amené à conclure que la vitesse d'un corps tombant dans l'air *s'approche* avec le temps *d'une valeur déterminée*. Autrement dit, au bout d'un certain chemin, le mouvement du corps devient uniforme et son accélération s'annule. Ce qui signifie que la résultante (la somme) des forces agissant sur le corps est nulle.

On comprend sans peine pourquoi la formule (1) ne peut être appliquée lors du calcul de la vitesse de chute d'un corps dans l'air. En effet, on la déduit en supposant que le corps se déplace sous l'effet d'une seule force, à savoir la *pesanteur*

$$P = mg. \qquad (2)$$

Mais nous avons vu que, pour un corps tombant dans l'air, au bout d'un certain temps la résultante s'annule, c'est-à-dire que la pesanteur P est *équilibrée* par une autre force dont nous n'avons pas tenu compte dans la formule (1). Il s'agit de la *résistance de l'air*. Oui, c'est bien la résistance de l'air qui atténue la vitesse de chute d'un parachutiste et qui semble le « soutenir ».

Comment évaluer la résistance de l'air? Admettons que le temps est calme. Si le corps est au repos, la résistance de l'air est nulle. Plus le mouvement du corps est rapide et moins facilement il fend l'air, c'est-à-dire que la résistance de l'air s'accroît. On l'observe facilement par un jour où il n'y a pas un souffle de vent et si l'on se déplace de plus en plus vite que ce soit en marchant, en courant ou en vélo. Nous allons supposer que la grandeur de cette force *est proportionnelle à la vitesse*, c'est-à-dire égale à bv, où v est la vitesse

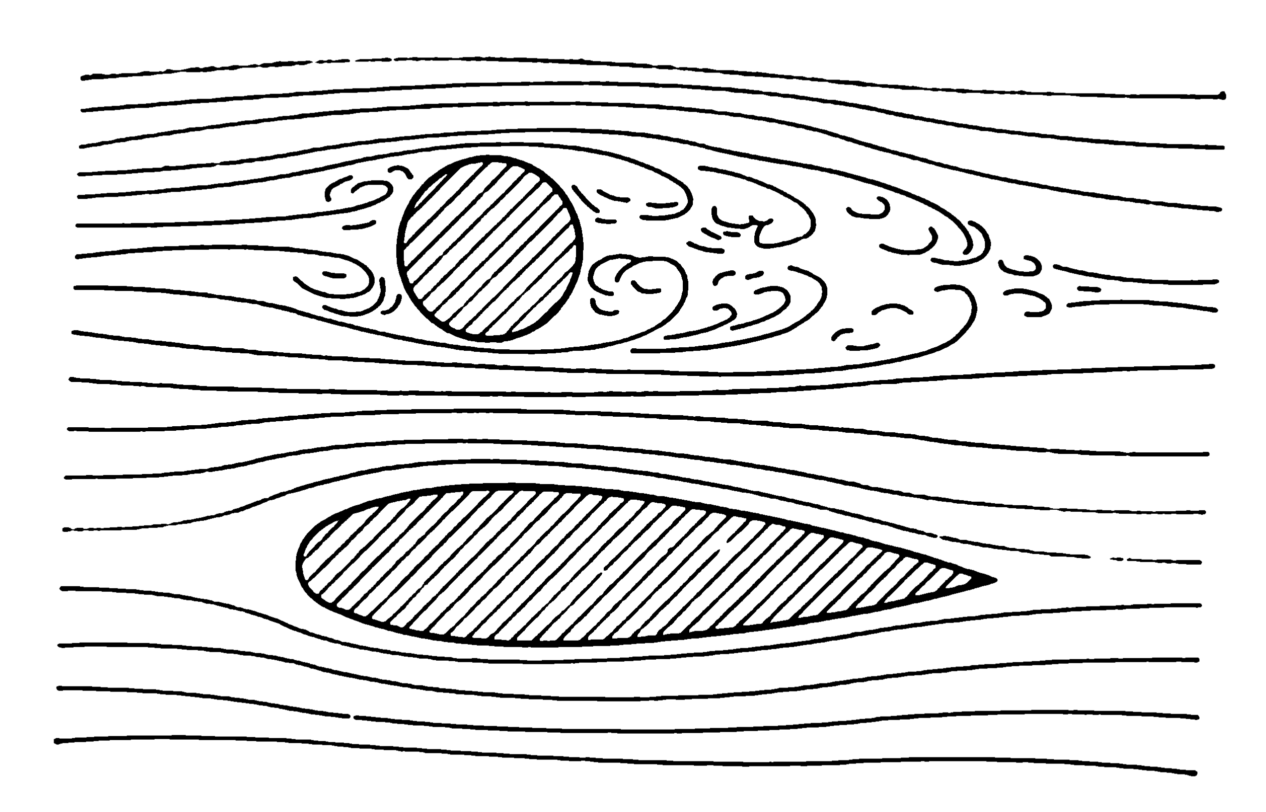


Fig. 1

du mouvement et b le coefficient de proportionnalité dépendant des dimensions et de la forme du corps. Cette hypothèse est parfaitement confirmée par l'expérience pour des vitesses peu importantes, de 1 à 2 m/s au plus *). Ainsi, la vitesse du mouvement étant la même, la résistance de l'air est 20 fois plus grande pour une boule que pour un corps fusiforme de même section transversale (fig. 1).

Bornons-nous à ces indications sommaires et convenons que la résistance de l'air (que nous noterons S) possède la valeur

$$S = -bv; \tag{3}$$

le signe moins montre que la direction de la résistance est contraire à celle de la vitesse.

*) Notons que pour des vitesses supérieures à 1-2 m/s, la résistance de l'air dépasse bv. On admet parfois qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse.

Ainsi, nous supposerons que le corps lancé en bas avec une certaine vitesse initiale est sollicité par deux forces: la pesanteur P et la résistance de l'air S. La deuxième loi de Newton nous autorise à écrire:

$$ma = P + S, \tag{4}$$

où m est la masse du corps et a son accélération. Il est commode de choisir pour sens positif sur la droite verticale non pas la direction vers le haut mais celle *vers le bas* puisque la vitesse d'un corps en chute est dirigée vers le bas et dans ces conditions elle est positive. La pesanteur dirigée vers le bas est elle aussi positive. Quant à la résistance de l'air, elle est orientée dans le sens contraire à la vitesse (c'est-à-dire vers le haut) et est donc négative. Si l'on substitue dans la formule (4) à P et S leurs valeurs (2) et (3), on obtient:

$$ma = mg - bv,$$

ou

$$a = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right); \tag{5}$$

il est tout naturel de considérer l'accélération comme positive si elle est dirigée vers le bas et négative dans le cas contraire.

L'équation (5) lie entre elles l'accélération et la vitesse d'un mouvement dont nous ignorons pour le moment la nature. Elle doit nous permettre de déterminer la façon dont va varier la vitesse d'un corps en mouvement au cours du temps.

Solution qualitative

Les raisonnements ci-dessus nous ont conduits à l'*équation* (5) donnant la vitesse de chute d'un corps. Nous avons maintenant à la *résoudre*. Aussi les raisonnements ultérieurs seront-ils d'un caractère purement mathématique, bien que,

pour être plus concret, nous parlions toujours de la vitesse de chute d'un corps.

L'équation (5) relie deux inconnues, la vitesse et l'accélération. En attribuant à l'accélération une valeur quelconque, nous trouvons à l'aide de (5) la valeur correspondante de la vitesse. Il semble donc au premier abord que l'équation (5) ne suffit pas *à elle seule* à déterminer les *deux* grandeurs v et a à la fois.

Il n'en est pourtant rien. L'accélération du mouvement d'un corps est complètement déterminée par la donnée de la variation de la vitesse avec le temps. Ainsi, l'équation (5) comprend non pas des grandeurs totalement arbitraires, mais les grandurs v et a *liées* entre elles. C'est ce qui permet de *résoudre* l'équation en question. L'étude du lien existant entre la vitesse et l'accélération va nous amener dans la suite à la notion de *dérivée.*

Nous allons démontrer deux propriétés de la vitesse, conséquences de la formule (5), qui nous donneront une idée parfaitement nette du caractère de la chute d'un corps (dans nos hypothèses). Dans la suite, nous obtiendrons de plus la formule exacte de la vitesse.

● PROPRIÉTÉ 1. *Si à l'instant initial la vitesse de chute* v_0 *est inférieure à* $\frac{mg}{b}$, *alors à tout instant suivant on aura* $v \leqslant \frac{mg}{b}$; *on aura* $v \geqslant \frac{mg}{b}$ *pour* $v_0 > \frac{mg}{b}$.

Démontrons par l'absurde et supposons que $v_0 < \frac{mg}{b}$ et qu'à un certain instant t_1 (t_1 secondes après le début de la chute) la vitesse dépasse $\frac{mg}{b}$. Alors, à un instant intermédiaire (peut-être pas un seul), la vitesse est $\frac{mg}{b}$. Soit t_0 le *dernier instant* (durant les t_1 premières secondes) où la vitesse est égale à $\frac{mg}{b}$, de sorte que l'inégalité $v > \frac{mg}{b}$ reste valable dans l'intervalle de temps compris entre t_0 et t_1.

Conformément à (5) il en résulte que durant cet intervalle l'accélération est *négative*. Or, pour ce même intervalle la valeur de la vitesse est passée de $\frac{mg}{b}$ à une valeur *plus grande*. La contradiction à laquelle nous avons abouti montre que la vitesse ne peut dépasser la valeur $\frac{mg}{b}$.

Le raisonnement est analogue pour le cas $v_0 > \frac{mg}{b}$.

● PROPRIÉTÉ 2. *Si* $v_0 < \frac{mg}{b}$, *la vitesse de chute augmente au cours du temps en s'approchant de plus en plus de la valeur* $\frac{mg}{b}$ *; si, par contre,* $v_0 > \frac{mg}{b}$, *elle diminue constamment en s'approchant toujours de la valeur* $\frac{mg}{b}$.

En effet, si $v_0 > \frac{mg}{b}$, la propriété 1 impose $v \geqslant \frac{mg}{b}$ durant le mouvement. La formule (5) fournit alors une accélération négative, et, par conséquent, la vitesse de chute va en diminuant.

Démontrons qu'avec le temps, la différence $v - \frac{mg}{b}$ devient inférieure à une grandeur h choisie d'avance qui est aussi petite que l'on veut (0,001 m/s par exemple). A cette fin, considérons l'instant

$$t^* = \frac{\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) m}{hb}.$$

Depuis le début du mouvement jusqu'à l'instant t^* la vitesse de chute a diminué en passant de la valeur v_0 à une valeur au moins égale à $\frac{mg}{b}$, c'est-à-dire qu'elle a diminué de

$$v_0 - \frac{mg}{b} = \frac{hb}{m} t^*$$

au plus. Il en découle qu'à un instant intermédiaire $t' < t^*$ l'accélération était au plus $\frac{hb}{m}$ (si, pendant cet intervalle de

temps, elle était supérieure à $\frac{hb}{m}$, la vitesse aurait diminué de plus de $\frac{hb}{m}t^*$).

Ainsi, on a à l'instant t':

$$|a| < \frac{hb}{m}.$$

D'où, selon (5):

$$\left|v - \frac{mg}{b}\right| = \frac{m}{b}\cdot|a| \leqslant \frac{m}{b}\cdot\frac{hb}{m} = h,$$

c'est-à-dire qu'à l'instant t' la différence entre v et $\frac{mg}{b}$ est inférieure à h. C'est également vrai pour les instants suivants puisqu'en diminuant la vitesse reste cependant supérieure à $\frac{mg}{b}$.

Nous voudrions attirer votre attention, cher lecteur, sur le fait que nous avons démontré une proposition plus rigoureuse que la propriété 2, à savoir:

$$t^* = \left|v_0 - \frac{mg}{b}\right|\cdot\frac{m}{hb}\ \text{s} \tag{6}$$

au plus après le début de la chute, la vitesse diffère de $\frac{mg}{b}$ *d'une quantité plus petite que* h.

Dans un certain sens les propriétés 1 et 2 donnent la solution du problème posé. Sans trouver pour le moment la formule exacte de la vitesse, nous connaissons déjà les lois *qualitatives* de sa variation, ce qui revient à dire que nous connaissons *comment* elle varie dans le temps.

Voyons, par exemple, une descente parachutée. Si le parachute s'ouvre dès que l'homme se lance dans le vide, la vitesse de chute est nulle au début, puis augmente, sans toutefois dépasser la valeur $\frac{mg}{b}$; mg est connue (c'est le poids de l'homme plus celui du parachute), et b dépend du dia-

mètre du coupole de ce dernier. Ceci permet de *calculer* un parachute tel que la vitesse de chute maximale possible $\left(\frac{mg}{b}\right)$ ne cause pas d'accident lors de l'arrivée au sol. Si le saut est à ouverture retardée, le coefficient dans l'expression de la résistance de l'air (b' en l'occurrence) est inférieur à celui du cas normal. Aussi la vitesse de chute maximale possible $\frac{mg}{b'}$ est-elle supérieure à $\frac{mg}{b}$. Par conséquent, pour le saut à ouverture retardée, la vitesse de chute immédiatement avant l'ouverture est supérieure à $\frac{mg}{b}$ et, selon la propriété 1, une fois la voilure ouverte, elle diminue et s'approche de $\frac{mg}{b}$, tout en restant plus grande que cette valeur. On voit que, dans ce cas aussi, le parachutiste peut ne rien craindre s'il atterrit un certain temps après l'ouverture de son parachute.

Illustrons ce que nous venons de dire par un exemple numérique.

● EXEMPLE 1. Supposons que le parachute est conçu de façon que la vitesse de chute du parachutiste en saut ordinaire s'approche de la valeur limite 6 m/s et que le parachutiste ouvre le parachute en effectuant un saut à ouverture retardée à la vitesse de 50 m/s. Au bout de combien de secondes la vitesse de chute devient inférieure à 10 m/s, c'est-à-dire la différence entre cette valeur et la valeur limite $\frac{mg}{b} = 6$ m/s devient inférieure à $h = 4$ m/s?

● SOLUTION. L'égalité $\frac{mg}{b} = 6$ m/s nous donne:

$$\frac{m}{b} = \frac{mg}{b} \cdot \frac{1}{g} \approx \frac{6 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 0{,}6 \text{ s}.$$

Ensuite, il vient de la formule (6) que la différence entre la vitesse de chute et la valeur limite $\frac{mg}{b} = 6$ m/s sera

$h = 4$ m/s au bout de $\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)\frac{m}{b}\frac{1}{h}$ secondes au plus, c'est-à-dire, dans nos suppositions, au bout de

$$(50 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s}) \cdot 0{,}6 \text{ s} \cdot \frac{1}{4 \text{ m/s}} = 6{,}6 \text{ s}.$$

Formule de la vitesse de chute d'un corps. Nombre e

Les propriétés 1 et 2 montrent comment la vitesse de chute d'un corps varie avec le temps. Plus bas nous déduisons la formule exacte de la vitesse de chute. L'expression de la vitesse comprend un nombre dont la valeur à cinq décimales près est 2,71828... Ce nombre se rencontre souvent en mathématiques « supérieures » et se note e (tout comme on désigne par π le nombre 3,14159... qui se rencontre souvent lui aussi et qui est le rapport de la longueur d'une circonférence à son diamètre). Pourquoi ce nombre $e = 2{,}71828...$ figure dans la formule de la vitesse et comment on le détermine de façon exacte, c'est ce qu'on verra dans la suite. Donnons pour l'instant (sans la démontrer) la formule de la vitesse de chute d'un corps et analysons des exemples adéquats.

Soient v_0 la vitesse initiale de la chute d'un corps et v_t sa vitesse de chute à l'instant t (c'est-à-dire au bout de t s). *Nous avons alors*:

$$v_t = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t}. \qquad (7)$$

C'est la solution exacte de l'équation (5); la démonstration de la formule (7) sera faite plus bas. Considérons plusieurs exemples.

● EXEMPLE 2. Démontrons que la formule (7) donne lieu immédiatement aux lois qualitatives régissant la variation de la vitesse que nous avons obtenues ci-dessus (propriétés 1 et 2).

En effet, le nombre $e^{-\frac{b}{m}}$ obtenu en élevant e à la puissance négative est positif et plus petit que 1, c'est-à-dire $0 < e^{-\frac{b}{m}} < 1$. Pour t croissant la quantité $e^{-\frac{b}{m}t} = (e^{-\frac{b}{m}})^t$ diminue (et peut devenir aussi petite que l'on veut pour t suffisamment grand). La formule (7) montre donc que, par exemple pour $v_0 > \frac{mg}{b}$, la vitesse v_t est toujours supérieure à $\frac{mg}{b}$ $\left(\text{puisque } v_0 - \frac{mg}{b} > 0\right)$, diminue au cours du temps et s'approche de $\frac{mg}{b}$.

● EXEMPLE 3. Calculons à l'aide de (7) la valeur de la vitesse de chute d'un parachutiste 6,6 s après qu'il a ouvert son parachute, le saut étant à ouverture retardée. Les valeurs numériques seront celles de l'exemple 1 (page 120): $\frac{mg}{b} = 6$ m/s, $v_0 = 50$ m/s. (Nous avons constaté que cette vitesse doit être inférieure à 10 m/s.)

● SOLUTION. Nous avons:

$$\frac{b}{m} = g : \frac{mg}{b} \approx 10 \text{ m/s}^2 : 6 \text{ m/s} = \frac{5}{3}\frac{1}{\text{s}}.$$

Utilisant ensuite les tables de logarithmes (le logarithme décimal du nombre e est approximativement égal à 0,4343), nous trouvons sans peine:

$$\lg(e^{-\frac{b}{m}t}) = -\frac{b}{m}t \lg e \approx -\frac{5}{3}\cdot 6{,}6\cdot 0{,}4343 =$$

$$= -4{,}7773 = -5 + 0{,}2227 = \bar{5}{,}2227,$$

d'où

$$e^{-\frac{b}{m}t} \approx 0{,}0000167.$$

En portant cette valeur dans (7), il vient:

$$v_{6,6s} \approx 6 \text{ m/s} + (50 \text{ m/s} - 6 \text{m/s})\, 0{,}0000167 \approx 6{,}000735 \text{ m/s}.$$

En utilisant la formule (7) on calcule tout aussi aisément que la vitesse de chute du parachutiste est 10 m/s (les conditions restant les mêmes) $t = \frac{3 \lg 11 \text{ s}}{5 \lg e} \approx 1{,}44$ s après l'ouverture du parachute *).

Ainsi, *quand on ouvre le parachute en saut à ouverture retardée, la vitesse de chute passe en* 1-2 *secondes de* 50-60 m/s *à la vitesse de chute quasi normale* (6-7 m/s) *avec la voilure ouverte.* La descente est fortement ralentie, c'est-à-dire que le parachutiste est soumis à une force importante dirigée vers le haut (poussée verticale) de la part du parachute. Quiconque a surveillé les sauts à ouverture retardée pouvait voir qu'à l'instant même de l'ouverture du parachute l'homme qui tombait rapidement ralentit brusquement: il semble même qu'il cesse momentanément de tomber.

● EXEMPLE 4. Supposons que la vitesse de chute du parachutiste effectuant un saut à ouverture retardée soit voisine de la valeur limite $\frac{mg}{b} = 50$ m/s, la vitesse initiale v_0 étant nulle. Quelle sera l'erreur commise si, au lieu de la formule (7), on utilise la formule (1), applicable pour un corps tombant dans le vide?

● SOLUTION. Nous avons:

$$-\frac{b}{m} = -\frac{g}{\frac{mg}{b}} \approx -\frac{10 \text{ m/s}^2}{50 \text{ m/s}} = -0{,}2\frac{1}{\text{s}}.$$

D'après la formule (7) la vitesse de chute du parachutiste est donc:

$$v_t = 50\left(1 - e^{-0{,}2t}\right).$$

*) En fait, elle s'approche encore plus vite de la valeur limite 6 m/s parce que l'expression (3) de la résistance de l'air est vérifiée de façon satisfaisante pour des vitesses de chute peu importantes. Si la vitesse est grande, la résistance de l'air croît *plus vite* que *bv*.

(1) nous fournit la valeur suivante de la vitesse de chute dans le vide:

$$v_t = gt \approx 10\ t.$$

Ainsi, le rapport de ces vitesses est:

$$\frac{50\,(1-e^{-0{,}2t})}{gt} \approx \frac{5}{t}\,(1-e^{-0{,}2t}).$$

Posant $t = 1$ s, les calculs simples à l'aide des tables de logarithmes donnent $\approx 0{,}91$ et pour $t = 2$ s la valeur $\approx 0{,}82$. Nous pouvons constater *que dès les premiers instants, la vitesse de chute diffère sensiblement, à cause de la résistance de l'air, de gt.*

Passons à la démonstration de la formule (7) *) et essayons de voir clair dans la question de liens entre la vitesse et l'accélération. Si v_t est la vitesse d'un corps à l'instant t et v_{t+h} sa vitesse dans h secondes (à l'instant $t+h$), le rapport $\frac{v_{t+h}-v_t}{h}$ est appelé *accélération moyenne* du corps durant h et se note a_{moy}:

$$a_{\text{moy}} = \frac{v_{t+h}-v_t}{h}.$$

Si h est très petit (disons 0,01 s ou moins selon le mouvement), l'accélération varie peu, de sorte que a_{moy} ne diffère guère de la valeur a_t à l'instant t. La différence entre a_t et a_{moy} diminue avec h. Autrement dit, pour un h de plus en plus petit (par exemple 0,1 s; 0,01 s; 0,001 s et ainsi de suite), t restant le même, a_{moy} varie en s'approchant toujours de a_t. Ce fait s'écrit comme suit dans le langage mathématique:

$$a_t = \lim_{h\to 0} a_{\text{moy}} = \lim_{h\to 0} \frac{v_{t+h}-v_t}{h}.$$

*) Si cette démonstration vous paraît difficile, vous pouvez passer outre sans que cela nuise à la compréhension des raisonnements suivants.

Le symbole « lim » se traduit comme la *limite* de l'expression qui le suit (en l'occurrence de a_{moy}) et $h \to 0$ sous le symbole montre qu'il s'agit de la limite de a_{moy} pour h tendant vers zéro.

Ainsi, nous avons obtenu la relation entre l'accélération et la vitesse. Démontrons maintenant trois autres propriétés de la vitesse du mouvement en question, puis, avec leur aide, la formule (7).

● PROPRIÉTÉ 3. *Si la vitesse et l'accélération d'un corps en mouvement vérifient la relation* (5), *la vitesse initiale* v_0 *détermine de façon unique la variation ultérieure de la vitesse.*

Supposons le contraire. Soient T et T^* deux corps de mêmes m et b qui se déplacent de façon que leurs vitesses et accélérations satisfont à la relation (5), et admettons qu'à l'instant $t = 0$ ils aient la vitesse initiale v_0 identique et à t_1 des vitesses différentes ($v_1 > v_1^*$). Supposons de plus, pour fixer les idées, que $v_0 > \frac{mg}{b}$ (dans le cas contraire, la démonstration est analogue). Soit t_0 le dernier des t_1 premiers instants où les vitesses des deux corps coïncident. Alors, dans l'intervalle de temps allant de t_0 à t_1 la vitesse v du premier corps est invariablement supérieure à la vitesse v^* du deuxième, autrementt dit $v > v^*$. Il s'ensuit que

$$v - \frac{mg}{b} > v^* - \frac{mg}{b},$$

les deux quantités $v - \frac{mg}{b}$ et $v^* - \frac{mg}{b}$ étant positives, puisque $v_0 > \frac{mg}{b}$ (cf. propriété 1). On conclut des inégalités

$$v - \frac{mg}{b} > v^* - \frac{mg}{b} > 0$$

et de la formule (5) que les accélérations a et a^* des deux corps lancés sont négatives, a étant supérieure à a^*. Ce qui signifie que de t_0 à t_1 les vitesses des corps T et T^* ont diminué et que celle de T l'a été plus que celle de T^*, c'est-à-

dire qu'à l'instant t_1 v doit être *inférieure* à v^* (du moment que, pour t_0, v_0 et v_0^* ont coïncidé). Or, nous avons émis l'hypothèse contraire. La contradiction obtenue confirme la justesse de la propriété 3.

● PROPRIÉTÉ 4. *Si deux corps identiques* *) *T et T* commencent à tomber simultanément avec les mêmes vitesses initiales* v_0 *et* v_0^*, *alors, quel que soit* t, *leurs vitesses* v_t et v_t^* *vérifient la relation*

$$\frac{v_t^* - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}. \tag{8}$$

Démontrons-le et considérons un corps imaginaire $\tilde{T}$ se déplaçant de manière qu'à l'instant t sa vitesse soit égale à

$$\tilde{v}_t = qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}$$

où

$$q = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}.$$

Montrons que la vitesse et l'accélération de notre corps satisfont à (5). Trouvons l'accélération moyenne correspondante au cours de l'intervalle de temps compris entre t et $t+h$. On a:

$$\tilde{a}_{\text{moy}} = \frac{\tilde{v}_{t+h} - \tilde{v}_t}{h} = \frac{\left[qv_{t+h} + (1-q)\frac{mg}{b}\right] - \left[qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}\right]}{h} =$$

$$= q\,\frac{v_{t+h} - v_t}{h} = q\cdot a_{\text{moy}},$$

où a_{moy} est l'accélération moyenne de T durant cette période. Si dans la relation $\tilde{a}_{\text{moy}} = q\cdot a_{\text{moy}}$ on prend h sans cesse

*) En ce sens que leurs m et b le sont.

plus petit, $\tilde{a}_{moy}$ s'approche de $\tilde{a}_t$, accélération à l'instant t du mouvement fictif, et a_{moy} de a_t, accélération du corps T au même instant. Nous obtenons donc $\tilde{a}_t = qa_t$ (pour un t arbitraire) et la relation (5) entraîne:

$$\tilde{a} = qa = -q\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right) =$$

$$= -\frac{b}{m}\left[qv + (1-q)\frac{mg}{b} - \frac{mg}{b}\right] = -\frac{b}{m}\left(\tilde{v} - \frac{mg}{b}\right),$$

c'est-à-dire que la relation (5) est vérifiée pour le mouvement fictif considéré.

Ensuite, la valeur de la vitesse initiale du corps $\tilde{T}$ fictif est

$$\tilde{v}_0 = qv_0 + (1-q)\frac{mg}{b} = q\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + \frac{mg}{b} =$$

$$= \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} \cdot \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + \frac{mg}{b} = v_0^*.$$

Ainsi, $\tilde{T}$ et T^* possèdent la même vitesse initiale et se déplacent de sorte que leurs vitesses et accélérations satisfont à l'équation (5). Vu la propriété 3, il en résulte que v_t^* et $\tilde{v}_t$ de ces déplacements coïncident pour tout t, c'est-à-dire

$$v_t^* = qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}.$$

On obtient par conséquent

$$\frac{v_t^* - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{\left[qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}\right] - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} =$$

$$= \frac{q\left(v_t - \frac{mg}{b}\right)}{v_t - \frac{mg}{b}} = q = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}},$$

et la propriété 4 se trouve démontrée.

● PROPRIÉTÉ 5. *Quels que soient les instants t et τ, on a la relation*

$$\frac{v_{t+\tau}-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\cdot\frac{v_\tau-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}, \qquad (9)$$

où v_0, v_τ, v_t, $v_{t+\tau}$ *est la vitesse de chute de T aux instants* 0, τ, t, $t+\tau$.

En effet, observons le corps T à partir de l'instant τ. Au bout de t secondes (autrement dit, $t+\tau$ secondes après le début du mouvement), la vitesse devient égale à $v_{t+\tau}$. Par conséquent, si, en plus de T, nous lançons à l'instant $t=0$ un autre corps T^* avec v_0^* égale à v_τ, sa vitesse v_t^* deviendra $v_{t+\tau}$ à l'instant t, ce qui signifie que $v_t^* = v_{t+\tau}$. On obtient à l'aide de (8):

$$\frac{v_{t+\tau}-\frac{mg}{b}}{v_t-\frac{mg}{b}}=\frac{v_\tau-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}$$

ou encore

$$\left(v_{t+\tau}-\frac{mg}{b}\right)\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)=\left(v_t-\frac{mg}{b}\right)\left(v_\tau-\frac{mg}{b}\right).$$

En divisant les deux membres de la dernière égalité par $\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)^2$, nous arrivons à la relation cherchée (9).

Cet objectif atteint, calculons la valeur exacte de v_t. Pour pouvoir se passer des formules compliquées, introduisons temporairement la notation

$$u_t=\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}.$$

La formule (9) se simplifie sensiblement et s'écrit:

$$u_{t+\tau}=u_t\cdot u_\tau. \qquad (10)$$

Pour $\tau = t$, (10) donne:

$$u_{2t} = (u_t)^2.$$

De même, posant $\tau = 2t$, on obtient de (10):

$$u_{3t} = u_t \cdot u_{2t} = u_t \cdot (u_t)^2 = (u_t)^3,$$

et pour $\tau = 3t$:

$$u_{4t} = u_t \cdot u_{3t} = u_t \cdot (u_t)^3 = (u_t)^4,$$

etc. En poursuivant, nous allons nous convaincre que, quel que soit n entier positif, la relation suivante est juste:

$$u_{nt} = (u_t)^n. \tag{11}$$

En y posant $t = \frac{p}{n}$ s et en extrayant la racine n-ième, nous trouvons

$$(u_p)^{\frac{1}{n}} = u_{\frac{p}{n}}.$$

Puis, faisant $t = 1$ s dans (11) et substituant p à n, il vient:

$$u_p = (u_1)^p.$$

Les deux dernières égalités donnent:

$$u_{\frac{p}{n}} = (u_1)^{\frac{p}{n}}.$$

Ainsi, si t est un nombre rationnel positif quelconque $\left(\text{de la forme } \frac{p}{n}\text{, où } p \text{ et } n \text{ sont entiers positifs}\right)$, alors

$$u_t = (u_1)^t,$$

ou, avec les notations initiales,

$$\frac{v_t - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^t; \tag{12}$$

ici v_1 est la vitesse de chute à l'instant $t = 1$ s.

Le fait que (12) est vraie pour tout t rationnel implique sa justesse pour n'importe quel t.

Considérons par exemple $t = \sqrt{2}\,s = 1{,}414 \ldots s$. Les nombres 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; etc. étant rationnels, la relation (12) est valable pour ces valeurs de t:

$$\frac{v_{1,4} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{1,4};$$

$$\frac{v_{1,41} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{1,41}; \ldots \quad (13)$$

Si les valeurs rationnelles de t sont autant d'approximations de plus en plus bonnes du nombre $\sqrt{2}$ (par exemple, 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; etc.), les premiers membres des égalités (13) tendent vers la limite $\frac{v_{\sqrt{2}} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}$ et les deuxièmes vers la limite $\left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{\sqrt{2}}$. Ainsi, on obtient à la limite

$$\frac{v_{\sqrt{2}} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Le raisonnement reste certes valable dans le cas de tout t irrationnel. Donc, la relation (12) joue pour tout t.

En introduisant la notation $\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = c$, nous obtenons

à partir de (12)

$$\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=c^t,$$

ce qui nous permet de trouver

$$v_t=\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)c^t. \qquad (14)$$

La formule ainsi obtenue de la vitesse de chute n'est pas définitive, parce que nous ne connaissons pas la valeur du nombre c y figurant. Pour calculer celui-ci, trouvons, en utilisant (14), l'accélération du corps à l'instant initial. Selon (14), l'accélération moyenne durant les premières h secondes est :

$$a_{\text{moy}}=\frac{v_h-v_0}{h}=\frac{\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)c^h-v_0}{h}=$$
$$=\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{c^h-1}{h}.$$

Pour h tendant vers zéro, cette expression fournit la valeur a_0:

$$a_0=\lim_{h\to 0}a_{\text{moy}}=\lim_{h\to 0}\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{c^h-1}{h}. \qquad (15)$$

En remplaçant c^h-1 par x, nous obtenons :

$$c^h-1=x,\quad c^h=1+x,\quad h=\log_c(1+x).$$

Au lieu de $\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{c^h-1}{h}$ sous le symbole de la limite dans (15), on a maintenant :

$$\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{x}{\log_c(1+x)}=\frac{v_0-\frac{mg}{b}}{\frac{1}{x}\log_c(1+x)}=\frac{v_0-\frac{mg}{b}}{\log_c(1+x)^{\frac{1}{x}}}.$$

Notons que si h tend vers zéro, le nombre c^h tend vers 1 et $x=c^h-1$ s'approche de zéro. Enfin, nous pouvons

écrire :

$$a_0 = \lim_{x\to 0} \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c (1+x)^{\frac{1}{x}}} . \qquad (16)$$

On appelle nombre e la limite de l'expression $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *pour* $x \to 0$. Nous ne démontrons pas ici que cette limite existe, c'est-à-dire que $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tend effectivement vers une certaine valeur pour $x \to 0$. Le lecteur peut trouver cette démonstration (même élémentaire) dans les premiers chapitres de chaque cours de mathématiques supérieures *).

Quant à nous, nous nous limitons à calculer $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = 0{,}1$; $x = 0{,}01$; $x = 0{,}001$; $x = 0{,}0001$. Ci-dessous les résultats du calcul (on peut se servir des tables de logarithmes, de préférence à sept chiffres ; on recommande également la formule du binôme de Newton) :

$$(1+0{,}1)^{\frac{1}{0{,}1}} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}59374,$$

$$(1+0{,}01)^{\frac{1}{0{,}01}} = 1{,}01^{100} \approx 2{,}70481,$$

$$(1+0{,}001)^{\frac{1}{0{,}001}} = 1{,}001^{1000} \approx 2{,}71692,$$

$$(1+0{,}0001)^{\frac{1}{0{,}0001}} = 1{,}0001^{10000} \approx 2{,}71814.$$

Ces calculs montrent assez bien que pour $x \to 0$ l'expression $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ a pour limite $e = 2{,}718\ldots$ (16) entraîne maintenant :

$$a_0 = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c e} .$$

---

*) Cf. *Cours de mathématiques supérieures* de Vladimir Smirnov, t. I, Editions « Mir », Moscou, 1972.

D'autre part, (5) donne:

$$a_0 = -\frac{b}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right).$$

En égalant les expressions trouvées de a_0 on voit que

$$\frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c e} = -\frac{b}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right),$$

d'où

$$\log_c e = -\frac{m}{b}; \quad e = c^{-\frac{m}{b}}; \quad c = e^{-\frac{b}{m}}.$$

Enfin, en portant dans (14) $e^{-\frac{m}{b}}$ au lieu de c, nous aboutissons à la formule (7), ce qui achève la démonstration.

2. DÉRIVATION

Notion de dérivée

Ainsi, l'équation (5) admet une solution exacte. Elle relie la grandeur v, vitesse de chute, et la grandeur a, *vitesse de variation de v* ou *accélération*.

Parler de la vitesse de variation d'une grandeur, c'est sous-entendre forcément non pas une grandeur constante, caractérisée par un seul nombre, mais bien une grandeur *variable*, c'est-à-dire celle dont la valeur change dans le temps. Comme exemples de grandeurs variant au cours du temps (dépendant du temps), citons entre autres la vitesse et l'accélération d'un mouvement non uniforme et l'intensité du courant alternatif.

Soit y une grandeur dont la valeur change avec le temps. Pour plus de commodité, désignons par y_t la valeur prise par y t secondes après le commencement du processus étudié. La différence $y_{t+h} - y_t$ montre la variation de y en h s (entre les instants t et $t+h$). Et le rapport

$$\frac{y_{t+h}-y_t}{h} \tag{17}$$

donne la variation moyenne de y par seconde (durant cet intervalle de temps), autrement dit, c'est la *vitesse moyenne de variation* de la variable y. Pour h de plus en plus petit, on obtient les valeurs de la vitesse moyenne pendant des intervalles de temps toujours moins grands à partir de l'instant t. A la limite ($h \to 0$), le rapport (17) donne la *vitesse de variation de la grandeur y* à l'instant t, dont la désignation mathématique nous est déjà familière :

$$\lim_{h\to 0}\frac{y_{t+h}-y_t}{h}\,. \tag{18}$$

L'expression (18) est la *dérivée* de la grandeur y par rapport au temps t ; elle donne, nous l'avons vu, la vitesse

de variation de la variable y. On peut prendre une variable qui ne change pas au cours du temps, mais dépend d'une autre grandeur quelconque. Ainsi, l'aire du cercle est fonction de son rayon; en désignant par S_R l'aire d'un cercle de rayon R on obtient:

$$S_R = \pi R^2. \tag{19}$$

En poursuivant l'étude du problème de relation entre l'aire d'un cercle et le rayon de celui-ci, on arrive au rapport $\frac{S_{R+h} - S_R}{h}$ exprimant la vitesse moyenne de variation de l'aire si le rayon varie. La limite de ce rapport (pour $h \to 0$) est la dérivée de S par rapport à R.

La notion de dérivée est l'une des notions fondamentales des mathématiques supérieures. Si y varie avec x (on dit alors que y est *fonction* de x), la dérivée de y par rapport à x est notée y' ou $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y_{x+h} - y_x}{h};$$

on se gardera de simplifier d qui n'est pas ici un facteur, mais symbolise l'*opération de recherche de la dérivée* appelée *dérivation.*

Trouvons, à titre d'exemple, la dérivée $\frac{dS}{dR}$ de la fonction (19):

$$\frac{dS}{dR} = \lim_{h \to 0} \frac{S_{R+h} - S_R}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\pi (R+h)^2 - \pi R^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (2\pi R + \pi h) = 2\pi R,$$

c'est-à-dire que la dérivée de l'aire du cercle par rapport au rayon est égale à la circonférence de ce cercle.

Un autre exemple sera le calcul de la dérivée $\frac{ds}{dt}$ du chemin par rapport au temps. Soit s_t le chemin parcouru

par un corps à l'instant t (autrement dit, t secondes après le début du mouvement). Le rapport $\frac{s_{t+h}-s_t}{h}$ est alors la vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps compris entre t et $t+h$ et son limite est, quand $h \to 0$, la valeur de la vitesse à l'instant t:

$$v_t = \lim_{h\to 0} \frac{s_{t+h}-s_t}{h} = \frac{ds}{dt}.$$

On calcule de même la dérivée $\frac{dv}{dt}$. Le rapport

$$\frac{v_{t+h}-v_t}{h}$$

est l'accélération moyenne durant l'intervalle de temps compris entre t et $t+h$, et la limite de ce rapport est l'accélération à l'instant t (cf. page 124):

$$a_t = \lim_{h\to 0} \frac{v_{t+h}-v_t}{h} = \frac{dv}{dt}.$$

Les relations

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad (20)$$

et

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (21)$$

qu'on vient de démontrer sont fondamentales en mécanique.

Equation différentielle

Reprenons une fois de plus l'équation (5). Selon (21), on peut la récrire comme suit:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right). \qquad (22)$$

On voit maintenant que c'est bien une équation à une inconnue v, non point une équation ***algébrique***, mais celle

reliant la grandeur v et sa dérivée. On l'appelle *équation différentielle*. En comparant l'équation différentielle (22) et sa solution (7) et désignant $\frac{b}{m}$ par k et $\frac{mg}{b}$ par c, nous pouvons formuler l'affirmation suivante.

● THÉORÈME. *La solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dv}{dt} = -k(v-c) \qquad (23)$$

est l'expression

$$v = c + (v_0 - c)\, e^{-kt}, \qquad (24)$$

où v_0 est la valeur initiale (c'est-à-dire la valeur pour $t = 0$) *de la grandeur v.*

Ce théorème nous permettra d'analyser certains autres phénomènes physiques.

Deux problèmes conduisant aux équations différentielles

a) Etablissement du courant électrique. Considérons un circuit électrique composé d'une bobine et d'une pile (fig. 2). Les propriétés électriques d'une bobine sont assez compliquées, encore que dans certains cas elles soient déterminées avec une grande précision par deux grandeurs: la *résistance* et l'*inductance*. Plus précisément, une bobine est supposée présenter ces deux éléments en série (fig. 3). La chute de tension dans la résistance est proportionnelle à l'intensité i du courant traversant la bobine (loi d'Ohm):

$$u_R = Ri;$$

le coefficient de proportionnalité R s'appelle la *résistance* de la bobine. La chute de tension dans l'inductance est proportionnelle à la *vitesse de variation de l'intensité du courant*. Désignant cette vitesse par w (elle est mesurée

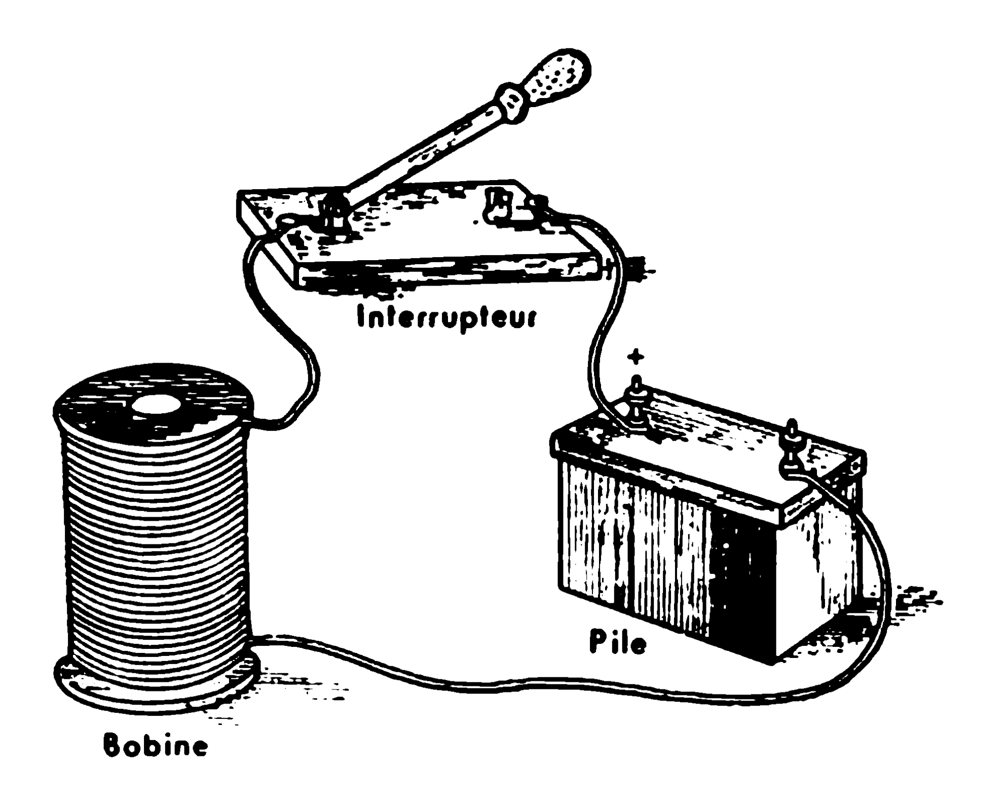


Fig. 2

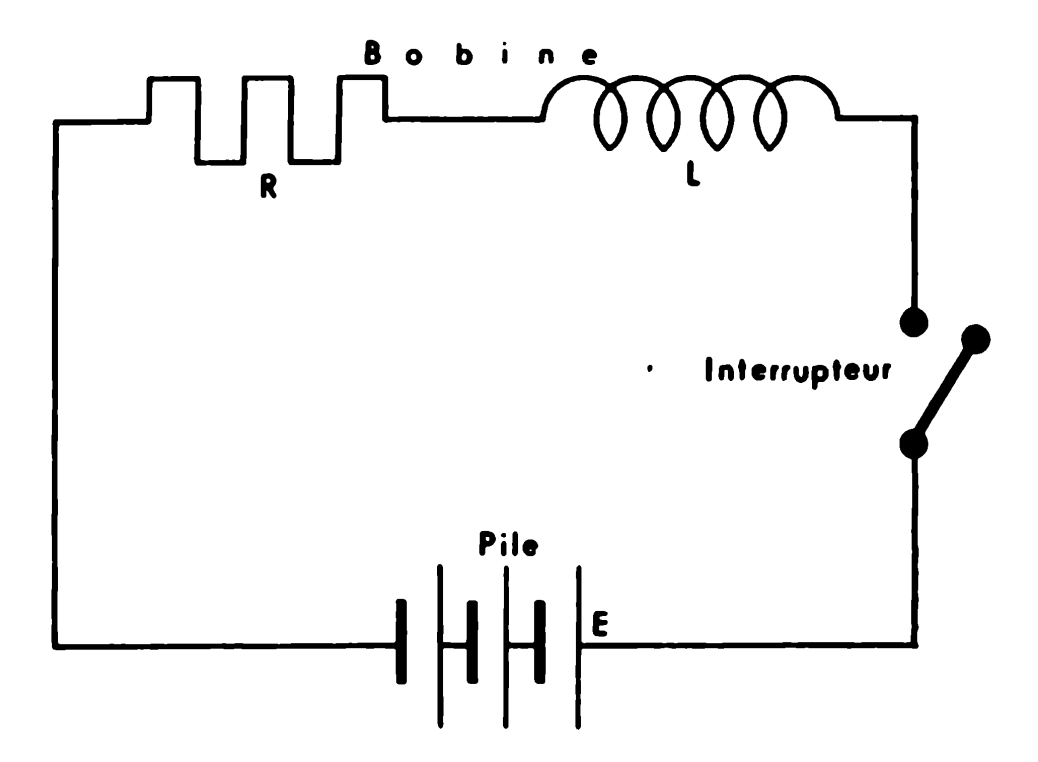


Fig. 3

entre autres en ampères par seconde) et le coefficient de proportionnalité par L, on obtient pour la chute de tension :

$$u_L = Lw.$$

La grandeur L est l'*inductance* de la bobine. La chute de tension dans la bobine est celle dans la résistance plus celle dans l'inductance, c'est-à-dire

$$u = Lw + Ri. \tag{25}$$

La formule (25) est bien vérifiée par l'expérience (si la fréquence du courant traversant la bobine n'est pas très élevée). Nous allons nous en servir. Désignons la force électromotrice (f.é.m.) de la pile par E. En égalant la f.é.m. de la pile à la chute de tension dans la bobine selon la deuxième loi de Kirchhoff (nous négligeons la résistance intérieure de la pile et la résistance des conducteurs) nous obtenons l'équation suivante :

$$E = Lw + Ri,$$

ou

$$w = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right). \tag{26}$$

Il suffit de recourir au théorème de la page 137 pour résoudre sans peine cette dernière égalité. En effet, en désignant l'intensité du courant à l'instant t par i_t, nous pouvons dire que la grandeur :

$$w_{\text{moy}} = \frac{i_{t+h} - i_t}{h},$$

est la vitesse moyenne de variation de l'intensité du courant entre t et $t + h$. Pour $h \to 0$ nous obtenons la vitesse de variation de l'intensité à l'instant t :

$$w = \lim_{h \to 0} \frac{i_{t+h} - i_t}{h} = \frac{di}{dt}.$$

Ainsi, w est la dérivée de l'intensité i par rapport à t et l'équation (26) peut s'écrire

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right).$$

La seule différence avec (23) est que la variable cherchée est notée i et non plus v, ce qui est sans importance. Les constantes k et c entrant dans (23) prennent dans notre cas les valeurs suivantes:

$$k = \frac{R}{L}, \quad c = \frac{E}{R}.$$

La solution de l'équation différentielle écrite se met alors sous la forme [cf. (24)]:

$$i_t = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Si à l'instant où la pile est mise en circuit (pour $t = 0$), on a $i_0 = 0$, la formule correspondante est plus simple, à savoir

$$i_t = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Il en découle qu'étant égale à zéro au moment du branchement de la pile, l'intensité du courant dans le circuit s'accroît sans cesse en s'approchant de la valeur $\frac{E}{R}$, c'est-à-dire de la valeur qu'aurait le courant dans une bobine qui posséderait la même résistance mais serait dépourvue d'inductance.

b) Désintégration de la substance radioactive. Soit un échantillon de roche contenant une certaine quantité d'une substance radioactive. Les atomes d'une substance radioactive peuvent se désintégrer en se transformant en une autre substance, *produit de désintégration*. Avec le temps, la quantité de substance radioactive en question va donc

diminuer. Introduisons la notion de *vitesse de désintégration*. Supposons que la quantité de substance radioactive présente dans la roche à l'instant t soit m_t grammes et qu'elle diminue (à cause de la transformation radioactive) et devienne m_{t+h} grammes au bout de h ans. L'expression

$$\frac{m_{t+h}-m_t}{h}$$

montre de combien de grammes diminue la masse de la substance en moyenne par an (durant la période considérée). Elle s'appelle naturellement *vitesse moyenne de la désintégration* pour l'intervalle de temps étudié. La limite vers laquelle tend la valeur de la vitesse moyenne pour $h \to 0$ est la vitesse de désintégration à l'instant t. Désignons-la par u:

$$u = \lim_{h \to 0} \frac{m_{t+h}-m_t}{h} = \frac{dm}{dt}.$$

Notez-le bien, la vitesse de désintégration est *négative* vu que la masse du corps radioactif diminue dans le temps.

Qu'est-ce qui détermine la vitesse de désintégration? Pour des faibles quantités de substance radioactive, on peut dire que la *vitesse de désintégration est proportionnelle à la quantité de substance radioactive présente dans la roche à l'instant donné*, c'est-à-dire que nous avons la relation

$$u = -km,$$

où m est la masse de la substance radioactive et k une constante positive (coefficient de proportionnalité).

On admet que cette loi est approximativement juste si l'on estime que la désintégration n'influe pas sur les atomes non transformés. Sous cette condition on peut affirmer que par unité de temps la même proportion (ou peu s'en faut) de substance radioactive, disons k, se désintègre sur chaque gramme quelle que soit la masse restante. Par suite, km grammes de substance sont désintégrés sur m grammes par unité de temps.

Est-ce que la désintégration n'influe vraiment pas sur les atomes non transformés? L'interaction des particules d'un atome désintégré et d'un autre atome d'un corps radioactif ne peut-elle provoquer la transformation de ce dernier? et les particules qui en résulteront ne peuvent-elles être à l'origine d'autres transformations, et ainsi de suite? Cette *réaction en chaîne* (tel est justement le mécanisme de la bombe atomique) exclut l'indépendance de la désintégration des atomes isolés. Pour que cette chaîne de transformations successives soit impossible il faut que les particules émises par suite de la désintégration se perdent sans frapper (dans la plupart des cas) autres atomes radioactifs. C'est ce qui arrive si la roche est pour l'essentiel non radioactive. Dans ce cas, la majorité écrasante de particules émises se perdent en frappant des atomes non radioactifs, et la réaction en chaîne s'avère impossible. Aussi, pour une quantité faible de corps radioactif présent dans la roche, on peut approximativement considérer la transformation d'atomes comme indépendante.

Ainsi, pour définir la masse de la substance radioactive non transformée on dispose de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

où, à la différence de (23), la quantité cherchée est notée m et non v et la constante c est dans le cas étudié égale à zéro. Selon (24), la solution s'écrit donc:

$$m_t = m_0 e^{-kt}, \qquad (27)$$

où m_0 est la masse de la substance radioactive à l'instant initial (autrement dit, à l'instant où nous commençons à observer le processus de désintégration).

● EXEMPLE 5. Dans combien d'ans la quantité de substance radioactive diminuera de moitié?

● SOLUTION. Déterminons au préalable t à partir de l'équation

$$m_0 e^{-kt} = \frac{1}{2} m_0.$$

En simplifiant par m_0 et prenant le logarithme on trouve

$$t = \frac{1}{k} \log_e 2 \approx \frac{0{,}69}{k}.$$

t est la *période* de la substance radioactive donnée. Elle ne dépend pas de la *quantité* de radioélément, elle n'est fonction que de k, c'est-à-dire du *radioélément* même. Ainsi, la période du radium est de 1590 ans, celle de l'uranium 238 d'environ 4,5 milliards d'années.

● EXEMPLE 6. La formule (27) permet certaines conclusions sur l'âge de la Terre.

Soit un morceau de roche extrait du sous-sol terrestre. Il contient, en plus de toutes sortes d'impuretés, m grammes de substance radioactive et p grammes de son produit de désintégration. Supposons en outre que, totalement désintégré, chaque gramme de cette substance donne r gramme. Cela signifie que p grammes de produit de désintégration proviennent de $\frac{p}{r}$ grammes de substance. Ainsi, si l'on admet qu'à un instant quelconque le morceau de roche est devenu le siège du processus de désintégration (c'est-à-dire qu'il n'y avait dans la roche que la substance radioactive initiale), la masse initiaie était $m + \frac{p}{r}$ grammes. Si l'on veut déterminer l'intervalle de temps écoulé depuis cet instant imaginaire qu'est le début de la désintégration jusqu'à notre époque, on doit conformément à (27) résoudre l'équation

$$m = \left(m + \frac{p}{r}\right) e^{-kt}$$

par rapport à t. Il s'ensuit:

$$t = \frac{1}{k} \log_e \left(1 + \frac{p}{rm}\right).$$

Des calculs analogues pour certaines roches terrestres donnent pour t des valeurs identiques de l'ordre de $2 \cdot 10^9$ ans. Conclusion : *des conditions permettant un processus normal de transformation radioactive existent sur Terre depuis plusieurs milliards d'années.* Il se peut qu'à cette époque lointaine, la matière constituant aujourd'hui notre planète était dans des conditions foncièrement différentes et des atomes plus simples et d'autres particules donnaient lieu à des atomes radioactifs.

Logarithmes népériens

Les formules de la solution des problèmes posés contiennent une fonction exponentielle de base e. Les calculs à l'aide de ces formules se simplifient beaucoup si l'on utilise les *logarithmes de base e.* Ainsi, en prenant les logarithmes de base 10 et de base e dans la formule (27), on obtient respectivement

$$\lg m_t = -kt \lg e + \lg m_0, \quad \log_e m_t = -kt + \log_e m_0.$$

Dans le premier cas on effectue une prise de logarithme et une multiplication de plus. D'autre part, les problèmes nous conduisent aux formules renfermant bien des logarithmes de base e (exemples 5 et 6). Le nombre e est non moins fréquent dans d'autres chapitres des mathématiques, et le recours aux logarithmes de base e s'avère un procédé fort commode, surtout en théorie. Les logarithmes de base e sont dits népériens (du nom de Neper) ou *naturels* et sont symbolisés par le signe ln : dire $\ln x$ c'est dire $\log_e x$. Les logarithmes décimaux et ceux népériens sont liés par la relation

$$\log_{10} x = M \cdot \ln x,$$

où

$$M = \log_{10} e \approx 0{,}4343.$$

Cette relation s'obtient sans peine en prenant les logarithmes de base 10 de l'identité

$$e^{\ln x} = x.$$

3. OSCILLATIONS HARMONIQUES

Problème des petites oscillations d'un pendule

Soit un fil de longueur l fixé en un point C et soit M un corps suspendu à son autre extrémité. On demande à déterminer le mouvement de M (pendule). La résolution mathématique du problème exige certaines simplifications. Supposons en premier lieu que le fil soit *inextensible* et *impondérable*.

Considérons le mouvement du pendule M dans un plan vertical passant par le point de suspension. Le fil étant inextensible, le corps M décrira dans son mouvement une circonférence de rayon l et de centre en C. Le fait d'être impondérable veut dire pour le fil que son poids est insignifiant devant celui de M ; nous pouvons donc affirmer que seul ce dernier est sollicité par les forces extérieures. Le pendule est considéré comme un point pesant (ce qui revient à dire qu'il possède une certaine masse m et qu'on peut négliger ses dimensions). De toutes les forces agissant sur M, on prendra en considération la tension du fil et la pesanteur. On négligera la résistance de l'air (on supposera, par exemple, que le corps est placé dans un récipient où l'on a fait le vide ; la question de savoir à quel point le mouvement du pendule dans l'air se distingue de son mouvement dans le vide est examinée dans la remarque page 164).

Supposons qu'à un certain instant M soit en A, un point de la circonférence qu'il décrit lors de son mouvement. Désignons par Q le point le plus bas de la circonférence, par s la longueur de l'arc QA et par α la valeur en radians de l'angle au centre QCA correspondant (fig. 4). On a alors :

$$s = l\alpha. \tag{28}$$

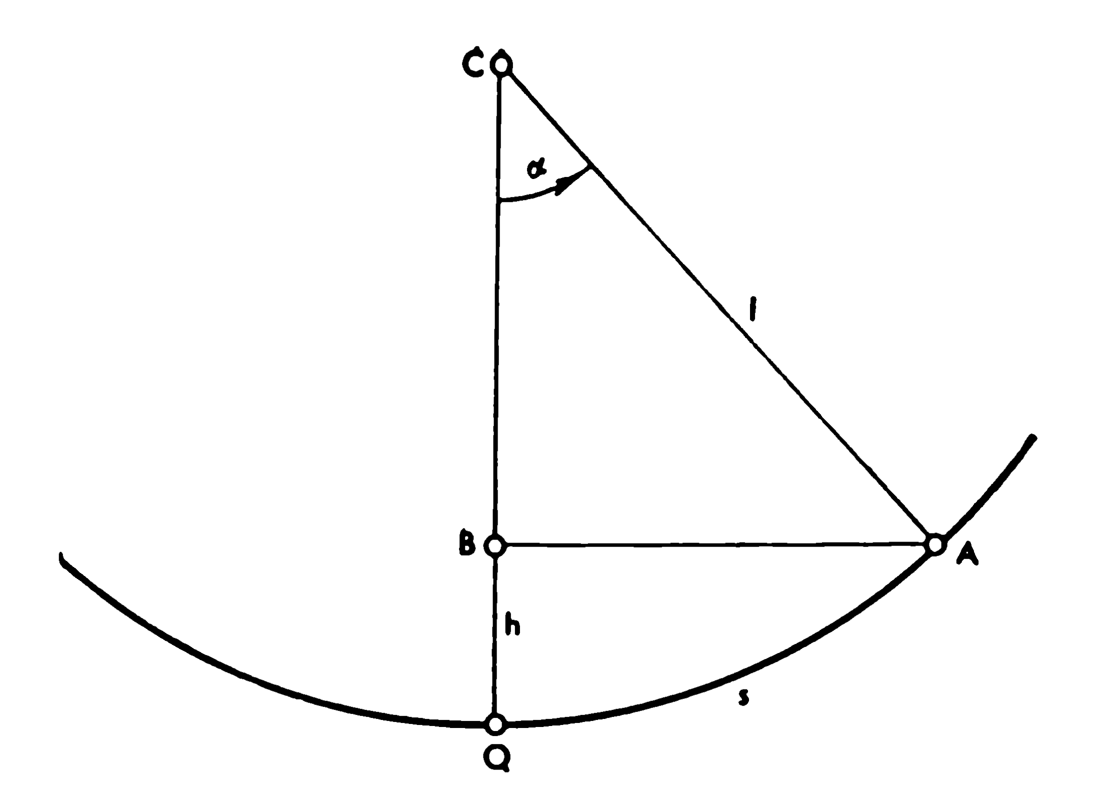


Fig. 4

L'arc s et l'angle α seront pris positifs si le point A est à droite de Q, et négatifs dans le cas contraire.

Etablissons l'équation qui nous permettra de trouver la loi du mouvement pendulaire. Passer du point Q au point A équivaut à monter le segment vertical $h = QB$:

$$h = CQ - CB = l - l\cos\alpha = l\,(1 - \cos\alpha) = l \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

C'est pourquoi on trouve pour l'énergie potentielle du pendule en A (son énergie potentielle en Q étant considérée nulle):

$$W^{(p)} = mgh = mg \cdot 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

Quant à l'énergie cinétique, elle a la valeur

$$W^{(c)} = \frac{mv^2}{2}\,,$$

où v est la vitesse de M. L'énergie totale E du pendule en A s'exprime par conséquent par la formule

$$E = \frac{mv^2}{2} + 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2} . \tag{29}$$

Puisque le pendule en mouvement n'effectue aucun travail (nous avons négligé le frottement et la résistance de l'air), son énergie reste constante (E = const).

Simplifions un peu l'équation (29). A savoir, bornons-nous au cas de *petites oscillations du pendule* qui déterminent un mouvement tel que le pendule s'écarte peu (de petits angles) de la position d'équilibre Q. Voyons ce qu'il convient d'entendre par l'expression « de petits angles ». Le fait est que la solution exacte de l'équation (29) ne saurait être écrite par les opérations connues. On se demande donc si l'on peut remplacer cette équation par une autre plus simple, à condition toutefois que la solution de celle-ci représente avec une grande précision la solution de l'équation (29). Notons que notre artifice n'est lourd d'aucune imprécision *de principe*: la relation (29) est déjà approchée *), de sorte que l'utilité d'une simplification est fonction du degré de précision voulu.

La simplification usuelle que l'on fait subir à l'équation (29) consiste à remplacer sin φ par φ. L'admissibilité de cette substitution pour des φ *petits* est confirmée par la figure 5 qui représente l'arc $A'Q'B'$ d'une circonférence de rayon $C'Q' = 1$; le rayon $C'Q'$ est la bissectrice de 2φ.

---

*) En établissant (29) nous avons négligé la résistance de l'air, le poids du fil, les dimensions du corps M, etc.

En général, toute loi physique, toute relation mathématique entre grandeurs physiques (telles les relations (1), (2), (3), (4), (5), (25), (29)) sont approchées, puisqu'il existe nécessairement des forces dont on n'a pas tenu compte lors de l'établissement de cette loi ou relation. Ce fait ne nuit nullement, cela va de soi, à la portée colossale des lois de la physique. La loi d'Ohm ou la deuxième loi de Newton ne sont-elles pas vérifiées, dans des conditions ordinaires, avec une précision impressionnante?

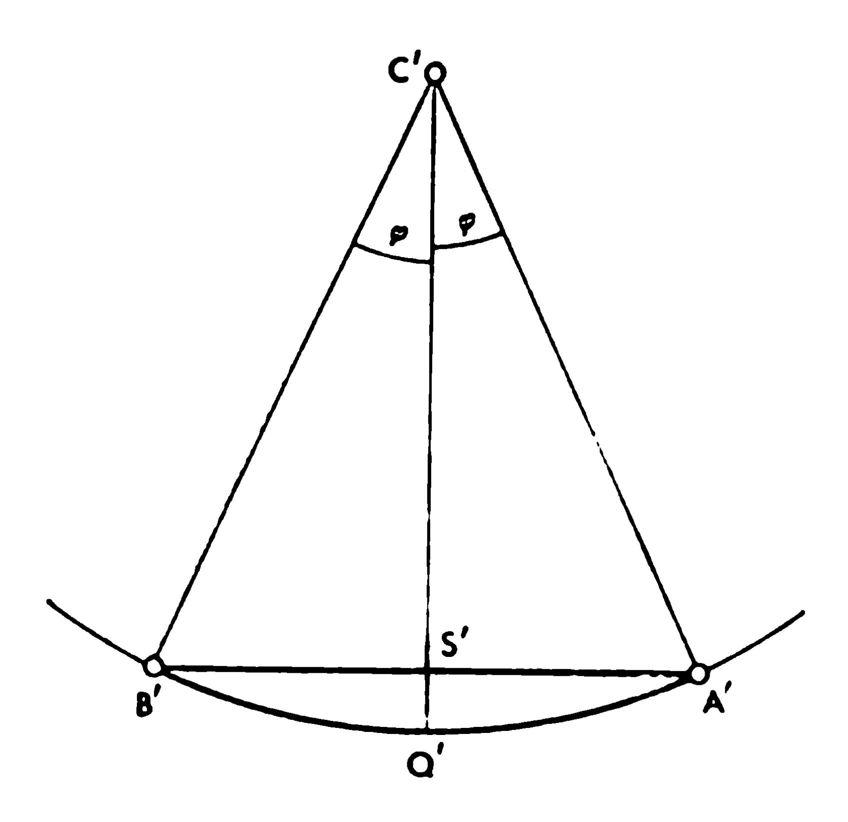


Fig. 5

La longueur du segment $A'B'$ est 2 sin φ (car $A'S'$ est la ligne du sinus) et celle de l'arc $A'B'$ est 2φ (les angles sont certes mesurés en radians). Un coup d'œil sur la figure 5 suffit à montrer que pour φ petits ces quantités ne se distinguent guère, et cela d'autant moins que φ est plus petit. Ainsi, on vérifie aisément en consultant les tables de fonctions trigonométriques que pour des angles ne dépassant pas 0,245 radian (i.e. ≈ 14°), le rapport $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ diffère de 1 de moins de 0,01 ; pour des angles inférieurs à un degré (0,017 radian) il en diffère d'environ 0,0005.

Ainsi, en considérant les écarts du pendule comme peu importants, remplaçons $\frac{\sin \alpha}{2}$ par $\frac{\alpha}{2}$, ce qui revient à remplacer (29) par une nouvelle équation, « peu différente »

de la précédente :

$$\frac{mv^2}{2} + 2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = E.$$

Compte tenu de (28), nous pouvons mettre cette relation sous la forme suivante :

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mgs^2}{2l} = E$$

ou

$$\frac{l}{g}v^2 + s^2 = \frac{2lE}{mg}. \tag{30}$$

Deux variables inconnues s et v y figurent (les constantes g, l, m, E sont considérées comme connues). Cependant, tout comme l'équation (5), la dernière équation se résout vu que s et v ne sont pas absolument quelconques, mais sont reliées par (20). Il découle de (20) que l'équation (30) peut s'écrire

$$\frac{l}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2 = \frac{2lE}{mg}, \tag{31}$$

ce qui est, en réalité, l'équation à une *seule* inconnue. Essayons de la résoudre.

Choisissons un système de coordonnées dans le plan et portons s sur l'axe des abscisses et $\sqrt{\frac{l}{g}}\,v$ sur l'axe des ordonnées. A tout instant t on associe au corps M une valeur déterminée du chemin s et de la vitesse v, c'est-à-dire un point déterminé N du plan (fig. 6). Inversement, en repérant N nous pouvons trouver ses coordonnées s et $\sqrt{\frac{l}{g}}\,v$, c'est-à-dire déterminer la position du pendule et sa vitesse. Ainsi, le pendule M est représenté à chaque instant t par un point N conventionnel. Le théorème de Pythagore nous donne immédiatement la longueur du segment ON :

$$ON = \sqrt{PN^2 + OP^2} = \sqrt{\frac{l}{g}v^2 + s^2}$$

ou, en vertu de la relation (30),

$$ON = \sqrt{\frac{2lE}{mg}}.$$

Le pendule étant animé d'un mouvement, s et v varient, en d'autres termes, le point N se meut dans le plan auquel est attaché notre système de coordonnées. La distance de N à l'origine reste cependant constante, à savoir $\sqrt{\frac{2lE}{mg}}$. Cela signifie que N se déplace sur une circonférence de rayon

$$R = \sqrt{\frac{2lE}{mg}}. \qquad (32)$$

Calculons la vitesse de N. Elle est dirigée suivant la tangente à la circonférence ; soit, par exemple le vecteur NA son image géométrique (fig. 7). Décomposons celui-ci en composante horizontale et composante verticale. La première est la vitesse de déplacement de P sur l'axe des abscisses. La distance de P à O étant s, la vitesse de P est $\frac{ds}{dt} = v$, i.e. $NB = v$. La similitude des triangles CNP et NAB nous donne :

$$PN : ON = NB : NA \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{l}{g}}\, v : R = v : NA.$$

La dernière proportion conduit à

$$NA = R\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

C'est bien la vitesse du mouvement de N sur la circonférence.

Désignons par s_0 et v_0 l'écart et la vitesse du pendule à l'instant initial et soit N_0 le point correspondant de la circonférence. Le rayon de cette dernière prend alors la valeur

$$R = \sqrt{\frac{l}{g} v_0^2 + s_0^2} \qquad (33)$$

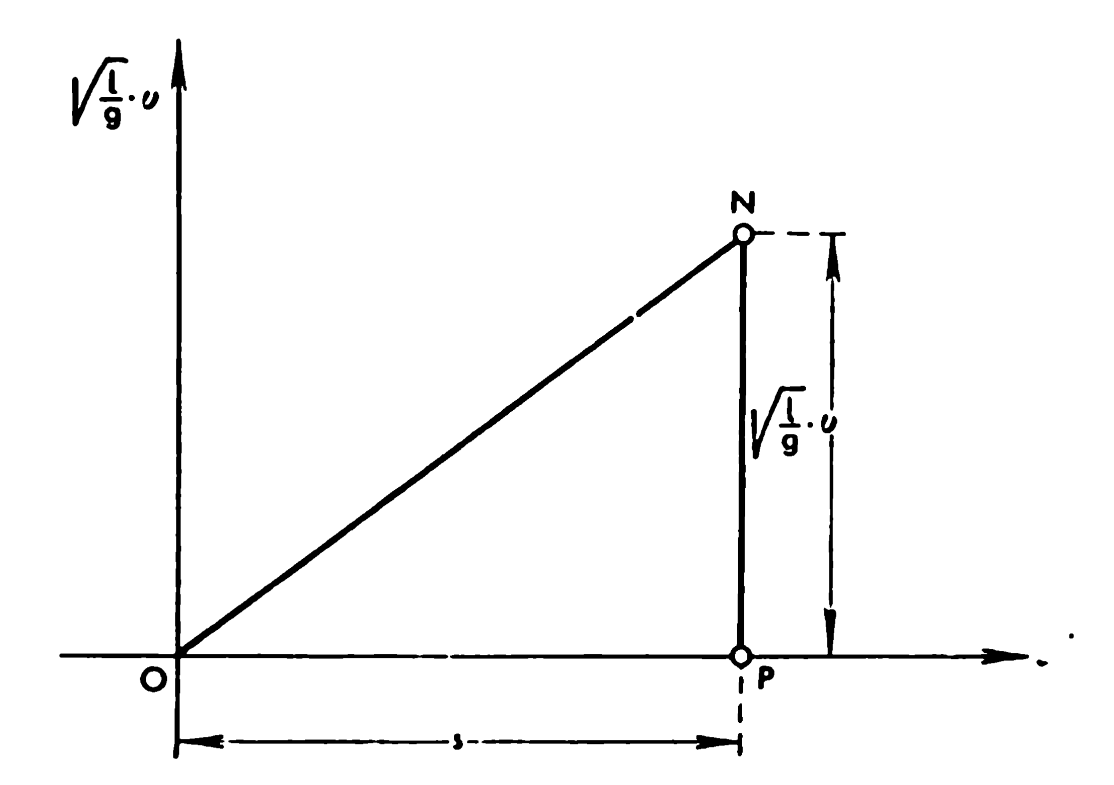


Fig. 6

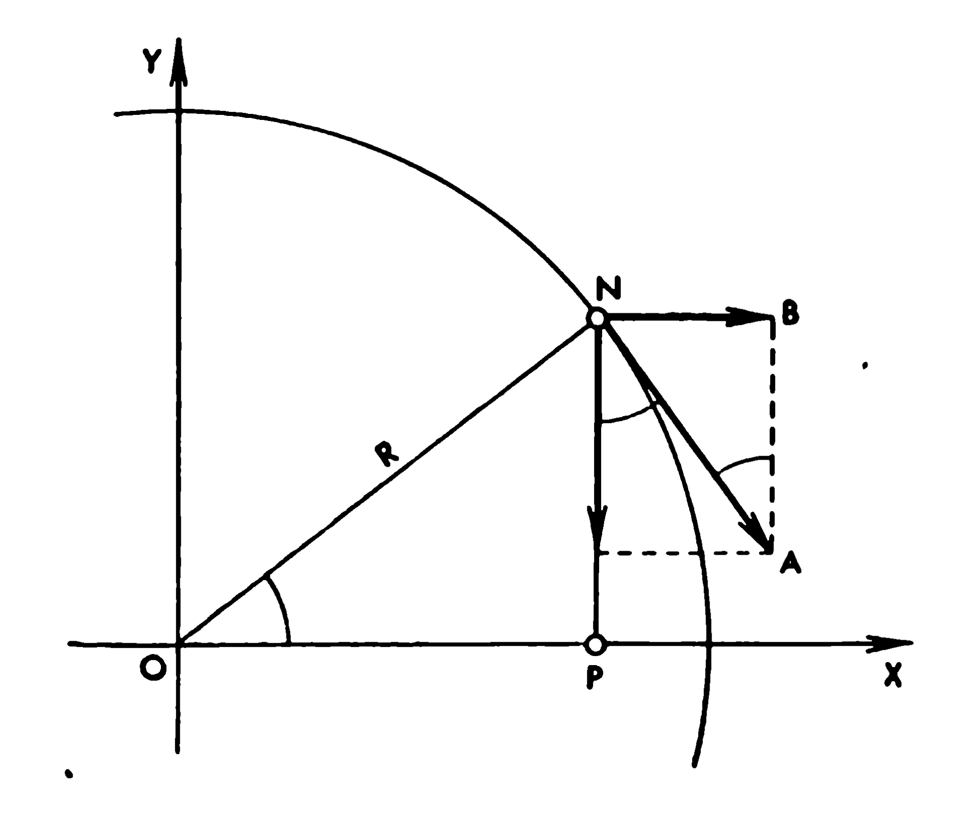


Fig. 7

[cf. (30), (32)], et l'angle $\varphi_0 = XON_0$ se détermine à l'aide de la relation

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot v_0}{s_0} \tag{34}$$

(fig. 8). Poursuivons. Au bout de t secondes, le point N se déplaçant à la vitesse $R\sqrt{\frac{g}{l}}$ parcourt un chemin $N_0N = = R\sqrt{\frac{g}{l}}t$ et l'angle N_0ON devient donc $\sqrt{\frac{g}{l}}t$. On a (fig. 9) :

$$\varphi = \widehat{XON} = \widehat{XON_0} - \widehat{N_0ON} = \varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

On en déduit :

$$OP = R\cos\varphi = R\cos\left(\varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right),$$

$$PN = R\sin\varphi = R\sin\left(\varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) =$$

$$= -R\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right).$$

Enfin, en nous rappelant que $OP = s$ et $PN = \sqrt{\frac{l}{g}}\,v$, nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} s &= R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right), \\ v &= -\sqrt{\frac{g}{l}}\,R\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Ces formules expriment l'écart et la vitesse du pendule t secondes après le début du mouvement, et elles résolvent donc complètement le problème du mouvement pendulaire (avec les simplifications admises). Passons aux exemples.

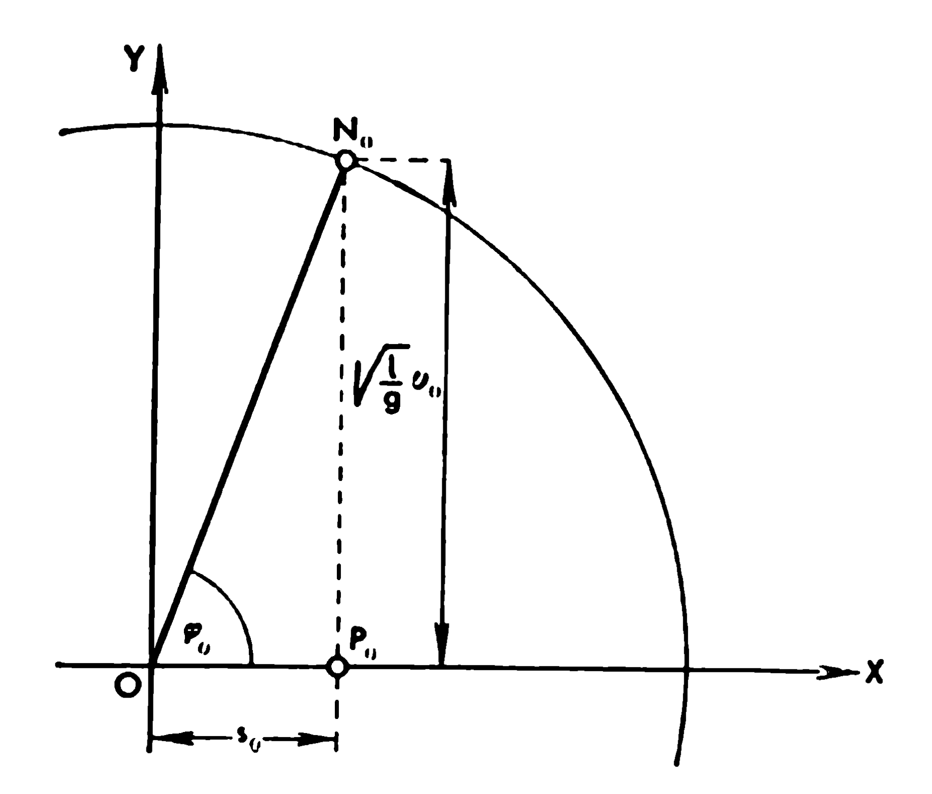


Fig. 8

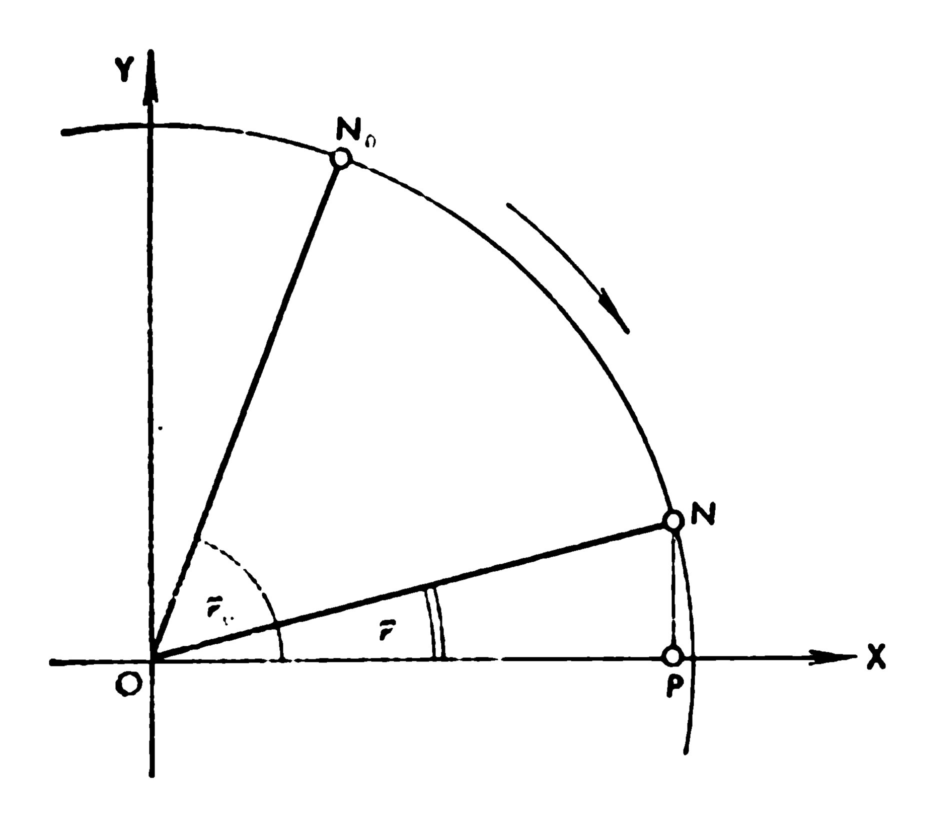


Fig. 9

● EXEMPLE 7. A l'instant initial le pendule est écarté à droite à une distance s_0 et est abandonné sans vitesse initiale. Trouver l'écart et la vitesse à l'instant t.

● SOLUTION. Dans le présent cas $R = s_0$ et $\varphi_0 = 0$, et les formules (35) fournissent

$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

$$v = -\sqrt{\frac{g}{l}}\, s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

● EXEMPLE 8. A l'instant initial le pendule était dans la position d'équilibre Q, puis une impulsion lui communique une vitesse initiale v_0 dirigée à droite (à savoir une vitesse positive). On demande de trouver l'écart et la vitesse du pendule à l'instant t.

● SOLUTION. Ici les formules (33) et (34) nous donnent un R et un φ_0 suivants: $R = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, et les formules (35)

$$s = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

$$v = -v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

● EXEMPLE 9. Trouver les dérivées des fonctions $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$.

Puisque v est la dérivée de s par rapport à t, en utilisant les expressions de s et v de l'exemple 8, nous établissons que

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = v_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

De même, l'exemple 7 nous fournit:

$$\frac{d}{dt}\left(s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = -\sqrt{\frac{g}{l}}\, s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

En particulier, posant $v_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $s_0 = 1$ et notant ω la quantité $\sqrt{\frac{g}{l}}$, il résulte de ces formules:

$$\frac{d}{dt}\sin \omega t = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d}{dt}\cos \omega t = -\omega \sin \omega t. \qquad (36)$$

● EXEMPLE 10. Le cosinus et le sinus étant des fonctions périodiques, au bout d'un certain intervalle de temps T, appelé *période de l'oscillation*, le pendule revient dans la position de départ, puis recommence le mouvement. Trouver la période de l'oscillation du pendule.

● SOLUTION. Pour une variation de l'argument de 2π, les valeurs du sinus et du cosinus ne changent pas. Aussi la période de l'oscillation est-elle un intervalle de temps T tel qu'au bout de T l'expression sous les signes du sinus et du cosinus des égalités (35) augmente de 2π. Autrement dit, les expressions $\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi_0$ à t et à $t + T$ diffèrent par 2π:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}(t+T) - \varphi_0 = \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi_0\right) + 2\pi.$$

On en tire sans peine T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (37)$$

Ainsi, le mouvement se répète toutes les T secondes, et on dit que le pendule effectue des *oscillations périodiques*. Au cours de chaque période (intervalle de temps égal à T) le pendule occupe une fois (les formules (35) sont là pour le montrer) la position extrême droite (le cosinus devient $+1$) et une fois la position extrême gauche (le cosinus devient -1). Aux instants de l'écart maximum, la vitesse du pendule est nulle [cf. (35); lorsque $\cos \varphi = \pm 1$ on a $\sin \varphi = 0$]. La vitesse maximale ($\sin \varphi = \pm 1$) est atteinte au point Q ($\cos y = 0$).

Equation différentielle des oscillations harmoniques

Les formules déterminant le mouvement pendulaire ont été obtenues à partir de l'équation (30) ou, ce qui revient au même, de l'équation différentielle (31). Il existe une autre équation différentielle pour décrire le mouvement du pendule que nous avons considéré. Sa déduction est fort simple.

Supposons que le corps M se trouve à un instant au point A de la circonférence qu'il parcourt dans son mouvement. Utilisons la règle du parallélogramme et décomposons la force de la pesanteur mg (qui, dans nos suppositions, agit suivant une verticale descendante) en deux composantes: suivant la tangente à la circonférence au point A et suivant la normale à la circonférence. La composante normale tend à allonger le fil mais est équilibrée par la force de tension de celui-ci (le fil étant supposé inextensible); la force tangentielle F est égale en grandeur à $mg \sin \alpha$ (on s'en convainc aisément) et est dirigée vers le point Q (fig. 10), ce qui veut dire qu'elle est négative pour α positif et vice versa. Ainsi,

$$F = -mg \sin \alpha.$$

En omettant la tension du fil et celle des composantes de la pesanteur qui est perpendiculaire à la tangente et qui équilibre la première, F est la seule à agir sur le corps M (n'oubliez pas que nous avons négligé la résistance de l'air), ce qui nous autorise à écrire, compte tenu de la deuxième loi de Newton:

$$ma - mg \sin \alpha$$

ou

$$a = -g \sin \alpha.$$

Si nous nous rappelons que nous ne nous intéressons qu'aux *petites oscillations* du pendule et pouvons donc remplacer approximativement $\sin \alpha$ par α, nous pouvons

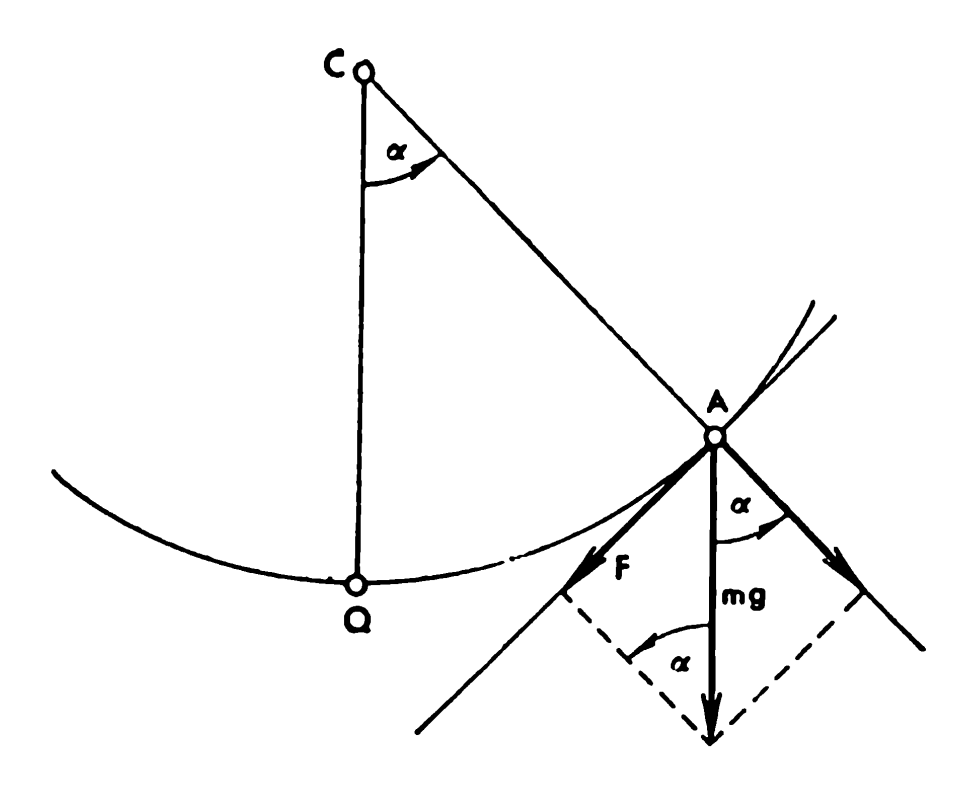


Fig. 10

mettre cette équation sous la forme que voici :

$$a = -g\alpha,$$

ou, conformément à (28),

$$a + \frac{g}{l} s = 0. \qquad (38)$$

C'est justement l'équation que nous cherchions. Montrons qu'elle peut se mettre sous forme *différentielle*. Les relations $a = \frac{dv}{dt}$ et $v = \frac{ds}{dt}$ entraînent que si l'on prend une fois la dérivée du chemin s et qu'on dérive la grandeur obtenue, à savoir la vitesse, on obtient l'accélération. En d'autres termes, l'accélération est la *dérivée seconde* du chemin s par rapport au temps t. Cela se note de la façon suivante :

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

ou

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} . \tag{39}$$

Le symbole $\frac{d^2s}{dt^2}$ (dérivée seconde de s par rapport à t) n'est pas une expression algébrique, c'est un signe unique; aucune opération, en particulier, la réduction de cette « fraction », n'est possible. Il résulte de (39) que l'équation (38) peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l} s = 0. \tag{40}$$

Notons que *nous savons déjà la résoudre.* En effet, elle détermine la loi de variation de s, c'est-à-dire la loi des oscillations du pendule, et nous avons fini l'étude du mouvement pendulaire. Aussi pouvons-nous dire d'emblée que la solution de l'équation (40) est fournie par la première formule (35). Et voici une formulation plus complète: *l'équation différentielle* (40) *admet pour solution*

$$s = R \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0 \right)$$

où R et φ_0 sont décrits par les formules (33), (34). Ceci étant, pour trouver R et φ_0 on doit connaître l'écart initial s_0 et la vitesse initiale v_0, c'est-à-dire les valeurs de s et $\frac{ds}{dt}$ au temps zéro.

Désignons la quantité $\sqrt{\frac{g}{l}}$ par ω. La proposition ci-dessus s'énonce alors de la manière suivante:

● THÉORÈME. *L'équation différentielle*

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \tag{41}$$

possède une solution

$$s = R \cos (\omega t - \varphi_0), \tag{42}$$

où R et φ_0 sont fonctions des valeurs initiales de s et $\frac{ds}{dt}$.

L'équation (41) est appelée *équation des oscillations harmoniques.* Qu'une grandeur soit décrite par une telle équation, on dit qu'elle effectue des oscillations harmoniques, ce qui signifie qu'elle varie au cours du temps suivant la loi (41). ω figurant dans l'équation différentielle (41) et dans sa solution (42) est la *pulsation des oscillations* et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la *période des oscillations.* Si s oscille de façon harmonique, elle passe par les mêmes valeurs toutes les T secondes (voir exemple 10).

Faisons la comparaison entre (23) et (41), toutes deux les équations différentielles. (23) ne comprend que la dérivée première et s'appelle pour cette raison *équation différentielle du premier ordre.* Par contre, (41) est une *équation différentielle du deuxième ordre* du moment qu'elle contient une dérivée seconde. Il convient de faire remarquer que pour résoudre l'équation du premier ordre (23) on n'a besoin que de la valeur de v à l'instant initial, tandis que dans le cas de (41) on doit connaître, en plus de la valeur s_0, la valeur de la dérivée $\frac{ds}{dt}$ au temps zéro. Donc, la résolution d'une équation du premier ordre exige la connaissance d'une seule valeur initiale, celle d'une équation du deuxième ordre la connaissance des valeurs initiales de deux grandeurs.

Notons que nous avons résolu (40) en nous basant sur des considérations physiques : les deux équations (31) et (40) décrivent un même phénomène physique et doivent avoir mêmes solutions, loi régissant le mouvement pendulaire. Ce raisonnement n'est certes qu'une intuition, pas une démonstration mathématique rigoureuse. On peut démontrer, sans quitter le terrain mathématique, que les équations (31) et (40) sont équivalentes, c'est-à-dire ont les mêmes solutions : en dérivant les deux membres de (31), on obtient (40). Inversement, l'équation (40) peut conduire à (31) si l'on recourt à l'opération inverse de la dérivation. Il s'agit de

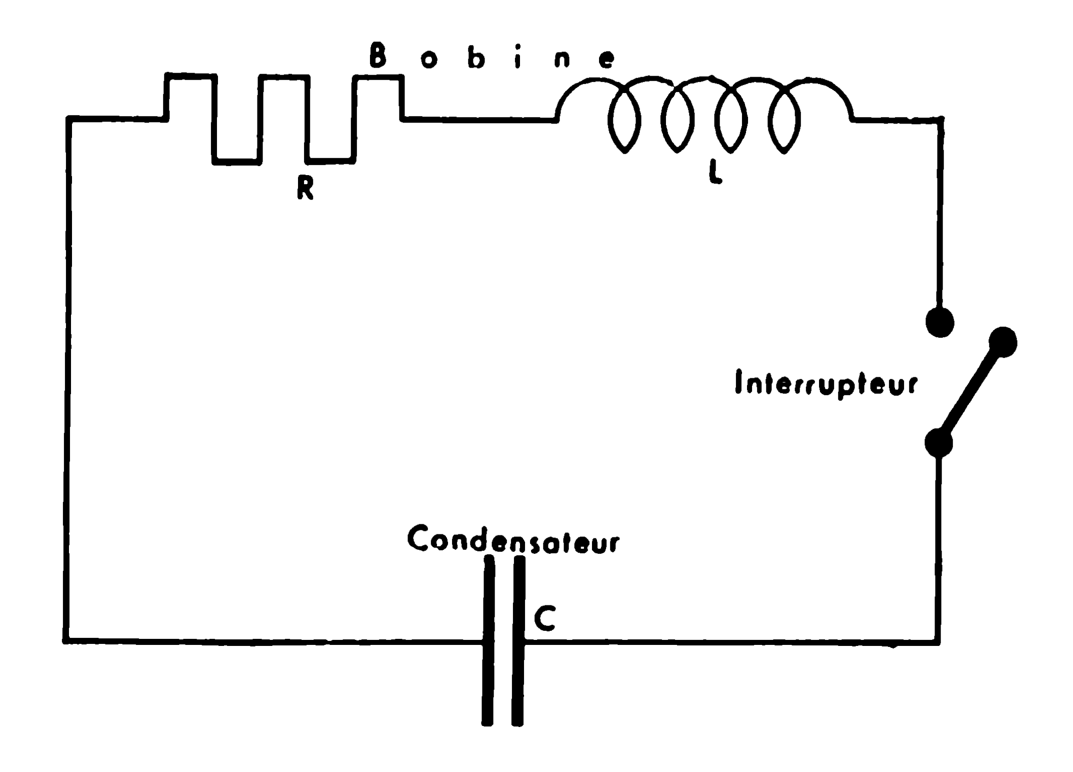


Fig. 11

l'*intégration* qui, jointe à la dérivation, constitue les assises des mathématiques supérieures. Le cadre de cet ouvrage nous interdit toute autre explication.

D'ailleurs, en s'aidant des formules (36), le lecteur peut trouver facilement la dérivée seconde de la fonction (42) et constater que cette fonction vérifie l'équation (41).

La physique met à notre disposition deux exemples suivants conduisant à l'équation des oscillations harmoniques.

Circuit oscillant

Considérons un circuit oscillant qui est un circuit électrique fermé comprenant une bobine et un condensateur. La bobine possède une *inductance* (cf. p. 139) et une *résistance*. Le circuit est schématisé sur la figure 11. Soient q la quantité d'électricité passée d'une armature du condensateur sur une autre et i l'intensité du courant dans le circuit.

Nous admettons qu'à l'instant initial la charge du condensateur était q_0 et le courant dans la bobine i_0 et nous voulons connaître leur variation ultérieure. Alors, la chute de tension sur le condensateur est $\frac{q}{C}$, où C est sa capacité ; la chute de tension dans la bobine est $Lw + Ri$, où R est la résistance et L l'inductance [cf. (25)]. Selon la deuxième loi de Kirchhoff, la chute de tension totale le long du circuit est nulle, c'est-à-dire :

$$Lw + Ri + \frac{q}{C} = 0. \tag{43}$$

i est la dérivée de q par rapport à t. En effet, si la quantité d'électricité q a aux instants t et $t + h$ les valeurs q_t et q_{t+h}, la quantité d'électricité passant durant cette période par toute section transversale du conducteur est $q_{t+h} - q_t$. Donc, l'intensité moyenne du courant dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + h$ est

$$i_{\text{moy}} = \frac{q_{t+h} - q_t}{h}.$$

En passant à la limite nous en tirons

$$i = \lim_{h \to 0} \frac{q_{t+h} - q_t}{h} = \frac{dq}{dt}.$$

Les relations $i = \frac{dq}{dt}$ et $w = \frac{di}{dt}$ impliquent que w est la dérivée de $i = \frac{dq}{dt}$, i.e. la dérivée seconde de q :

$$w = \frac{d^2q}{dt^2}$$

L'équation (43) peut se récrire :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{44}$$

Elle est plus compliquée que (41) parce qu'y figurent, à part la fonction inconnue q et sa dérivée seconde $\frac{d^2q}{dt^2}$,

la dérivée première $\frac{dq}{dt}$. Nous passons néanmoins outre à la résolution de (44) (cf. remarque page 164) en nous bornant au cas où la résistance R de la bobine est très petite devant L et C et en négligeant, par conséquent, $R\frac{dq}{dt}$ de l'équation (44). Elle s'écrira alors comme suit :

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$$

ou

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0. \qquad (45)$$

L'équation (45) est évidemment celle des oscillations harmoniques [cf. (41)], la pulsation ω de ces oscillations dans le circuit considéré étant

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et la période s'exprimant par la formule

$$T=2\pi\sqrt{LC}.$$

La solution de (45) a la forme [cf. (42)]:

$$q=R\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}-\varphi_0\right),$$

où R et φ_0 dépendent des valeurs initiales, c'est-à-dire de q_0 et i_0.

Oscillations sous l'effet de la force élastique d'un ressort

Soit un ressort auquel est suspendu un corps de masse m. Le ressort s'allonge un peu sous son effet jusqu'à ce que la force de tension équilibre le poids et ce système devienne immobile. Si nous tirons sur le corps de sorte qu'il perd l'équilibre et descend, la force de tension du ressort devient

supérieure au poids et leur résultante se dirige vers le haut. Si, par contre, le corps vient occuper une position au-dessus du point d'équilibre, la résultante est dirigée vers le bas. On dirait qu'elle tend à faire reprendre au corps la position d'équilibre.

Recherchant la simplicité, nous nous bornerons au cas où le mouvement se fait suivant la droite verticale. Soient O la position d'équilibre, A la position du corps à un certain instant et s la distance OA. Ceci posé, on choisit pour le sens positif du mouvement la direction à partir de O vers le bas, c'est-à-dire que s est positif si le corps (point A) est au-dessous de O et négatif dans le cas contraire. Soient F la résultante de la force de tension et du poids et S la résistance de l'air. Nous admettons que F et S sont seules à agir sur le corps. Conformément à la deuxième loi de Newton, nous pouvons écrire

$$ma = F + S,$$

où a est l'accélération du corps. La force F qui tend à faire reprendre au corps la position d'équilibre augmente avec l'écart s de celui-ci. Admettons que F est proportionnelle à s, c'est-à-dire qu'elle est égale en grandeur à ks, k étant le coefficient de proportionnalité, la *rigidité* du ressort. Cette hypothèse est bien confirmée par les expériences (pour des s pas très grands). Si s est positif (ce qui équivaut à A au-dessous de O), F est dirigée vers le haut, donc est négative ; si s est négatif, la force en question est positive. Autrement dit, le signe de F est opposé à celui de s:

$$F = -ks.$$

Supposons que

$$S = -bv$$

[cf. (3)].

L'équation du mouvement du corps s'écrit alors

$$ma = -ks - bv,$$

ou

$$ma + bv + ks = 0. \qquad (46)$$

Vu que $v = \frac{ds}{dt}$ et $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + ks = 0. \qquad (47)$$

L'équation différentielle (47) est analogue à l'équation différentielle (44) obtenue dans le problème du circuit oscillant. Sans résoudre l'équation (47) (cf. remarque ci-dessous), nous nous limitons au cas où l'on peut négliger la résistance de l'air (c'est-à-dire quand b est petit devant m et k). L'équation (47) se récrit alors

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0. \qquad (48)$$

C'est l'équation des oscillations harmoniques de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et de période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Conformément à (42), la solution de (48) est

$$s = R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi_0\right), \qquad (49)$$

où R et φ_0 dépendent des conditions initiales, c'est-à-dire de s_0 et v_0.

● REMARQUE. Afin d'obtenir l'équation des oscillations harmoniques nous avons négligé, lorsque nous avons étudié les oscillations d'un pendule et celles d'un poids, les forces de frottement et la résistance de l'air, et lors de l'étude du circuit oscillant nous avons fait abstraction de sa résistance. Physiquement, cela signifie que, dans nos hypothèses, il n'y a aucune dépense d'énergie, et, mathématique-

ment, que dans l'équation différentielle on a omis le terme contenant la dérivée première. Le résultat en est les oscillations harmoniques, c'est-à-dire des oscillations se répétant de façon identique, des oscillations *non amorties.*

Quel serait le résultat si nous avions tenu compte de la résistance de l'air et de la chute de tension dans la résistance? Quelle est la différence, par exemple, entre les solutions de l'équation (44) et celles de (45)? Les calculs mathématiques que nous ne reproduisons pas ici montrent que l'équation (44) décrit elle aussi un processus oscillatoire si R n'est pas très grand. Ces oscillations s'amortissent cependant dans le temps et s'appellent donc des *oscillations amorties.* On l'explique en termes de la physique en disant que l'énergie des oscillations diminue sans cesse en se transformant en énergie thermique du moment que le passage du courant à travers la résistance R s'accompagne du dégagement de chaleur. De même, les oscillations du pendule faiblissent, s'amortissent progressivement, puisque le frottement et la résistance de l'air font que l'énergie du pendule va dans une mesure toujours plus grande échauffer le pendule lui-même et l'air ambiant. Pour une résistance faible, durant un intervalle de temps limité (de l'ordre de plusieurs périodes), les oscillations amorties diffèrent peu de celles non amorties (harmoniques). L'amortissement ne se fait sentir qu'au bout d'une période temporelle assez longue. Si l'on suspend un poids pesant à l'extrémité d'une corde et que l'on l'écarte légèrement de la position d'équilibre, au bout de 10 à 15 périodes, l'amplitude d'oscillations diminue d'une façon peu sensible, voire imperceptible, de sorte que nous ne le remarquons que quelques minutes après le début du mouvement.

A titre de comparaison, donnons sans la déduire la solution exacte de l'équation (47). Supposons que le coefficient b dans l'expression de la résistance de l'air n'est pas très grand (notamment, $b < 2\sqrt{mk}$). La solution susmentionnée

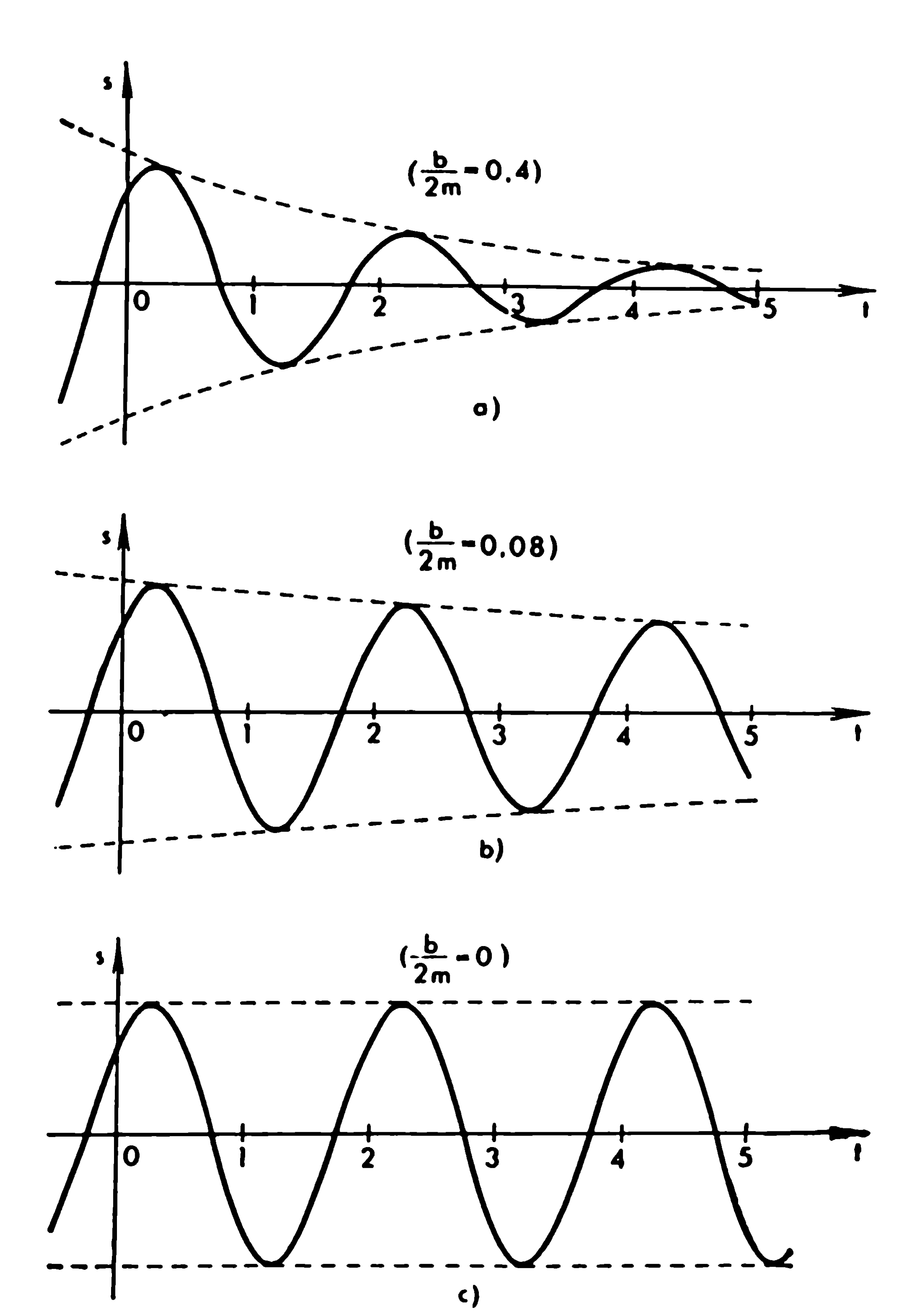

s
$(\frac{b}{2m}=0.4)$
0
1
2
3
4
5
t
a)
s
$(\frac{b}{2m}=0.08)$
0
1
2
3
4
5
t
b)
s
$(\frac{b}{2m}=0)$
0
1
2
3
4
5
t
c)

Fig. 12

s'écrit alors :

$$s = Re^{-\frac{b}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}\, t - \varphi_0\right), \qquad (50)$$

où R et φ_0 se déterminent par les conditions initiales. La formule montre que s décroît indéfiniment avec le temps (le facteur $e^{-\frac{b}{2m}t}$ diminue continûment lorsque t augmente). La figure 12,*a* et *b* nous offre les courbes représentatives des fonctions (50) pour diverses valeurs du coefficient $\frac{b}{2m}$. Plus $\frac{b}{2m}$ est petit, et plus lentement s'amortissent les oscillations. Comparez ces graphiques avec celui des oscillations harmoniques (49) (fig. 12,*c*) (la formule (50) coïncide avec (49) si $\frac{b}{2m} = 0$).

Notons pour conclure que pour b grand ($b > 2\sqrt{mk}$), la formule (50) est remplacée par une autre. Dans ce cas, le poids passe au plus une fois par la position d'équilibre pour s'approcher lentement de cette position tout en restant d'un même côté (au-dessus ou au-dessous) de cette position.

4. CERTAINES AUTRES APPLICATIONS DE LA NOTION DE DÉRIVÉE

Plus petite et plus grande valeurs

Considérons une variable y dont les valeurs dépendent d'une grandeur x. Si l'on dit que y dépend de x ou que y est *fonction* de x, on sous-entend qu'à chaque valeur de x correspond une valeur bien déterminée de y. Par exemple, l'aire du cercle est fonction de son rayon, c'est-à-dire qu'elle dépend de la valeur du rayon. Sinus, cosinus, tangente, etc. sont autant de fonctions de l'angle qu'on appelle fonctions trigonométriques (ou circulaires).

Donc, soit y fonction de x. Posons le problème suivant : trouver une valeur de x telle que y prenne *la plus grande valeur*. Avant d'en aborder la résolution, introduisons la notion importante de *domaine de définition* d'une fonction en nous adressant aux exemples.

Considérons comme premier exemple la fonction suivante. Soit V le volume d'un kilogramme d'eau à la pression atmosphérique normale et à la température t °C. V est alors fonction de t. Il est évident que cette fonction est donnée pour les valeurs de t comprises entre 0 et 100°. En effet, sous la pression atmosphérique normale, la température de l'eau ne peut pas être inférieure à zéro (l'eau se transforme alors en glace) ni dépasser 100° (l'eau devient la vapeur). Ainsi, la fonction V n'est déterminée que pour des températures qui vérifient les inégalités $t \geqslant 0$ et $t \leqslant 100$, ou, dans la notation usuelle, $0 \leqslant t \leqslant 100$.

Autrement dit, le *domaine de définition* de V est constitué par des nombres vérifiant la condition $0 \leqslant t \leqslant 100$. Ce domaine de définition est dit *segment de la droite numérique* car les points correspondant aux nombres vérifiant la condition $0 \leqslant t \leqslant 100$ remplissent tout un segment de la droite numérique. Les nombres 0 et 100 sont les *extrémités* ou les *bornes* du segment $0 \leqslant t \leqslant 100$, et tous les nombres

intermédiaires *ses points intérieurs. Pour toute valeur t_i intérieure au domaine de définition on trouve, sur ce segment de la droite numérique, des nombres inférieurs et supérieurs à t_i.* Les extrémités du segment ne jouissent pas de cette propriété.

Prenons pour deuxième exemple l'intensité du courant parcourant le circuit électrique de la figure 3 t secondes après sa fermeture. L'intensité que nous notons i est alors fonction du temps t. La façon dont i dépend de t est illustrée par la formule de la page 140. Pour quelles valeurs de t la fonction i est-elle définie? On conçoit que tant que le circuit n'est pas fermé, c'est-à-dire pour $t < 0$, il n'est traversé par aucun courant, et l'étude de i n'a de sens que pour $t \geqslant 0$. Le *domaine de définition* de la fonction i renferme donc tous les t satisfaisant à la condition $t \geqslant 0$. Ce domaine de définition (on pourrait l'appeler *demi-droite numérique*) a une seule borne, à savoir $t = 0$, tous les autres points lui étant intérieurs.

Passons, enfin, à un troisième exemple qui est la fonction $y = \sin x$. Elle est définie pour tout x, c'est-à-dire que son *domaine de définition* est la droite numérique toute entière et est dépourvu de bornes.

Il existe des fonctions dont les domaines de définition sont très compliqués, or, nous ne considérons que des fonctions définies sur la droite ou la demi-droite numérique ou encore sur un segment de cette droite.

Revenons au problème posé plus haut de la recherche de la plus grande valeur d'une fonction. Est-ce qu'une fonction peut prendre la plus grande valeur à l'extrémité de son domaine de définition? Bien sûr que oui. Montrons-l sur l'exemple de la fonction V que nous venons de considérer et qui exprime le volume d'un kilogramme d'eau à la pression normale et la température t °C. L'échauffement faisant augmenter ce volume, la fonction V atteint sa plus grande valeur pour $t = 100°$, c'est-à-dire à l'extrémité du domaine de définition.

La dérivation permet, dans de nombreux cas, de trouver rapidement la plus grande valeur de la fonction. On a notamment l'affirmation suivante.

Soit y une fonction de la variable x. Si cette fonction prend la plus grande valeur au point $x = a$ intérieur à son domaine de définition, en ce point la dérivée $\frac{dy}{dx}$ devient égale à zéro *).

Démontrons cette proposition. Désignons par y_x la valeur de y correspondant à une valeur de x choisie dans le domaine de définition de la fonction. Nous avons supposé que la valeur y_a qu'admet y pour $x = a$ est la plus grande, i.e.

$$y_a \geqslant y_x \tag{51}$$

pour tout x pris dans le domaine de définition de la fonction. Quand $x = a$, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est définie par la relation

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{pour } x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{y_{a+h} - y_a}{h} \,. \tag{52}$$

Démontrons que cette dérivée est nulle.

Faisons d'abord tendre h vers zéro par valeurs *positives.* Etant donné que le numérateur $y_{a+h} - y_a$ de la fraction sous le signe de la limite vérifie l'inégalité $y_{a+h} - y_a \leqslant 0$ [cf. (51)] et vu que $h > 0$, toute la fraction en question est non positive (elle est nulle ou bien négative). La limite de cette fraction ne peut alors être positive non plus, ce qui veut dire que la *dérivée* (52) *ne peut être un nombre positif.*

Faisons ensuite tendre h vers zéro par valeurs *négatives.* On a toujours $y_{a+h} - y_a \leqslant 0$ [cf. (51)], mais $h < 0$, et la fraction sous le signe de la limite est donc non négative. Ce qui fait que sa limite (i.e. la dérivée qui nous intéresse) *ne peut être négative non plus.*

---

*) A condition que cette dérivée existe, car il y a des fonctions qui n'en possèdent pas.

Ainsi, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ne peut être pour $x = a$ ni positive, ni négative, elle doit donc être nulle, ce qu'il fallait démontrer.

Dans notre démonstration, nous avons essentiellement utilisé le fait que a est le point *intérieur* du domaine de définition de la fonction. En effet, nous avons donné à h des valeurs tant positives que négatives, de sorte que $a + h$ admettait des valeurs tant supérieures qu'inférieures à a.

Supposons que a soit une extrémité du segment de définition. Le domaine d'existence ne comprend alors que des valeurs plus grandes que a ou bien des valeurs plus petites que a, c'est-à-dire que la démonstration faite n'est plus juste.

Les raisonnements seront analogues si l'on se propose de trouver *la plus petite* valeur de la fonction et, nous démontrerons que si la fonction prend sa plus petite valeur en un point intérieur de son domaine de définition, sa dérivée s'annule en ce point. En réunissant les deux cas, nous arrivons à un théorème dû à Fermat :

● THÉORÈME. *Si une fonction atteint en un point intérieur de son domaine de définition sa plus grande (ou plus petite) valeur, la dérivée de la fonction en ce point s'annule.*

Ce théorème permet justement de trouver les plus grandes (petites) valeurs par la dérivation. On a à trouver la dérivée de la fonction considérée et les points intérieurs de son domaine de définition en lesquels la dérivée s'annule. Le point de plus grande (petite) valeur de la fonction sera ou bien un des points en lesquels la dérivée devient nulle ou bien une des bornes du segment de définition.

● EXEMPLE 11. Les extrémités d'un conducteur (par exemple, d'un appareil de chauffage) sont réunies à une pile de f.é.m. E et de résistance intérieure r. Quelle doit être la résistance du conducteur pour que la puissance délivrée par la pile soit maximale?

● SOLUTION. Désignons la résistance du conducteur par R. La résistance totale du circuit est alors $R+r$ et l'intensité du courant dans le circuit est

$$i=\frac{E}{R+r}.$$

La puissance fournie au conducteur par la pile s'exprime par la formule $W = i^2R$, c'est-à-dire

$$W=\frac{E^2R}{(R+r)^2}. \qquad (53)$$

Cela nous autorise à énoncer le problème d'une autre manière : pour quelle valeur de R la fonction W définie par la formule (53) prend-elle la plus grande valeur ?

Le domaine de définition de W est la demi-droite $R \geqslant 0$ (la résistance du conducteur ne pouvant pas être négative). Trouvons la dérivée $\frac{dW}{dR}$:

$$\frac{dW}{dR}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{E^2(R+h)}{(R+h+r)^2}-\frac{E^2R}{(R+r)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{E^2[(R+h)(R+r)^2-R(R+h+r)^2]}{h(R+h+r)^2(R+r)^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{r^2-R^2-Rh}{(R+h+r)^2(R+r)^2}=\frac{r^2-R^2}{(R+r)^4}=\frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Pour que cette dérivée, i.e. la fraction

$$\frac{r-R}{(R+r)^3},$$

s'annule, il faut que son numérateur $r-R$ devienne égal à zéro, c'est-à-dire que $R=r$.

Ainsi, la puissance W atteint sa plus grande valeur soit pour $R=r$, soit à l'extrémité $R=0$ du domaine de définition. Mais si $R=0$, W l'est également (c'est là sa plus petite valeur). C'est pourquoi la puissance ne prendra sa

plus grande valeur que pour $R = r$, c'est-à-dire à condition que *la résistance du conducteur soit égale à la résistance intérieure de la pile.*

Est-ce que ce sera vraiment ainsi ? Car nous n'avons montré que W peut atteindre sa plus grande valeur uniquement pour $R = r$, mais de là à l'atteindre réellement, il y a loin.

On se convainc aisément que cette possibilité devient réalité. En effet, pour $R = 0$, la puissance W est elle aussi nulle, et, pour R très important, l'intensité du courant est fort faible, par conséquent la puissance aussi, la différence de potentiel aux extrémités du conducteur ne dépassant pas E. Il est clair que la puissance doit admettre la plus grande valeur pour une certaine valeur, pas très grande, de R. Et puisque la puissance *doit* prendre la plus grande valeur (et ne le *peut* que pour $R = r$), la plus grande valeur de la puissance est bien atteinte pour $R = r$.

● EXEMPLE 12. On demande de fabriquer une chaudière cylindrique de volume donné V. Il serait bien que la surface totale de la chaudière soit minimale: primo, la quantité de métal nécessaire sera ainsi minimale, et, secundo, plus petite est la surface de la chaudière et moins le contact de l'air environnant la fera se refroidir. Trouver les dimensions optimales de la chaudière.

● SOLUTION. Désignons le rayon de la base du cylindre par R et sa hauteur par h. Alors

$$V = \pi R^2 h,$$

c'est-à-dire

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

La surface du cylindre a la valeur $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$, c'est-à-dire

$$S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}. \qquad (54)$$

Quel doit être R pour que S, fonction du rayon R, admette la plus petite valeur. Trouvons la dérivée $\frac{dS}{dR}$:

$$\frac{dS}{dR} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[2\pi (R+h)^2 + \frac{2V}{R+h}\right] - \left[2\pi R^2 + \frac{2V}{R}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\pi (2Rh + h^2) - \frac{2Vh}{R(R+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[4\pi R + 2\pi h - \frac{2V}{R(R+h)}\right] = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}.$$

En l'égalant à zéro, nous trouvons $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et donc

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R.$$

Autrement dit, *la hauteur du cylindre doit être égale à son diamètre.*

Est-ce justement la valeur pour laquelle la surface du cylindre prend sa plus petite valeur? La réponse affirmative est facile à obtenir. En effet, pour R très grands, S l'est également (le premier terme dans l'expression de S prend une valeur importante, cf. (54)). Pour R très petits, il en est également de S (c'est le deuxième terme de ladite expression qui est grand). Par conséquent, pour une certaine valeur (pas très grande ni très petite) de R, S doit admettre la plus petite valeur. Vu que la dérivée $\frac{dS}{dR}$ ne s'annule que pour une seule valeur de R, il correspond à cette dernière la surface minimale du cylindre.

Nous nous bornons à ces deux exemples. Les manuels et les recueils d'exercices offriront à quiconque en exprime le désir nombre de problèmes de ce type. Nous recommandons au lecteur de résoudre certains d'entre eux à condition de ne

pas négliger la dernière partie des raisonnements, qui consiste à démontrer que le point trouvé correspond justement à la plus grande ou à la plus petite valeur. Les cours de mathématiques supérieures font connaître des procédés plus subtils permettant de vérifier si la fonction admet réellement au point obtenu la plus petite ou la plus grande valeur. N'oublions pas non plus qu'il existe les règles de calculs des dérivées. Le lecteur étant censé ignorer ces règles, les dérivées des exemples ci-dessus ont été obtenues par calcul direct.

Problème de la recherche d'une tangente

Soient L une courbe et M_0 son point quelconque. Etudions le problème du tracé d'une *tangente* à la courbe au point M_0. Tout d'abord, quelques mots sur la manière dont la tangente est déterminée par les mathématiciens. Prenons un autre point quelconque de la courbe L, notons-le M et menons la droite M_0M que nous allons appeler *sécante*: elle coupe la courbe L en deux points M_0 et M au moins. Si M se déplace sur L en s'approchant de M_0 (suivez sur la figure 13 les positions successives M, M', M'', . . . du point M), la sécante M_0M tourne autour du point M_0. Si, M tendant vers M_0, la sécante tend en tournant vers une certaine droite M_0K, celle-ci est dite la *tangente* à la courbe L au point M_0.

Supposons maintenant que la courbe L est tracée dans le plan attaché à un système de coordonnées de façon qu'à chaque point M de L correspondent son abscisse x et son ordonnée y. Désignons l'abscisse de M_0 par a (fig. 14) et la longueur du segment N_0N par h. L'abscisse du point M est alors $a + h$. Désignons l'ordonnée du point M_0 par y_a et celle du point M par y_{a+h}. La longueur du segment MP est

$$MP = MN - PN = MN - M_0N_0 = y_{a+h} - y_a,$$

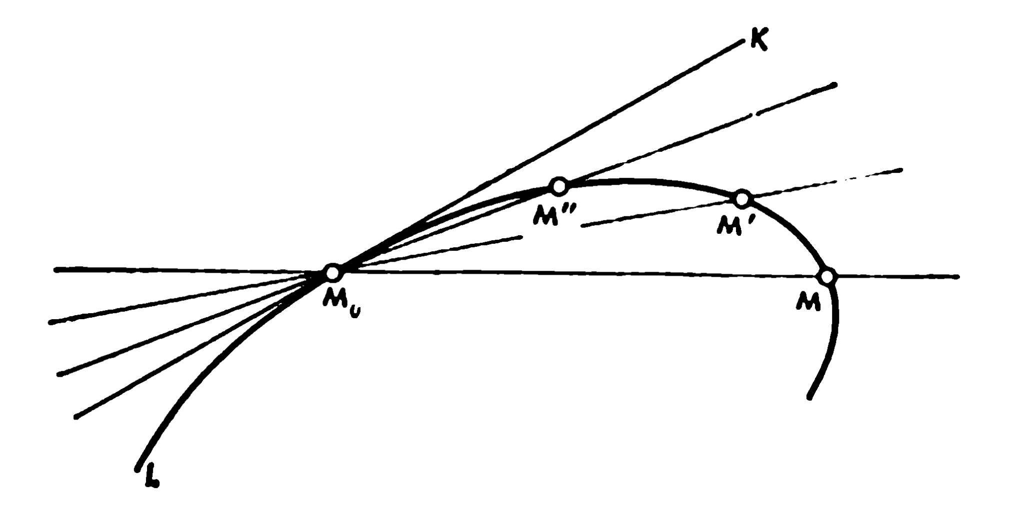


Fig. 13

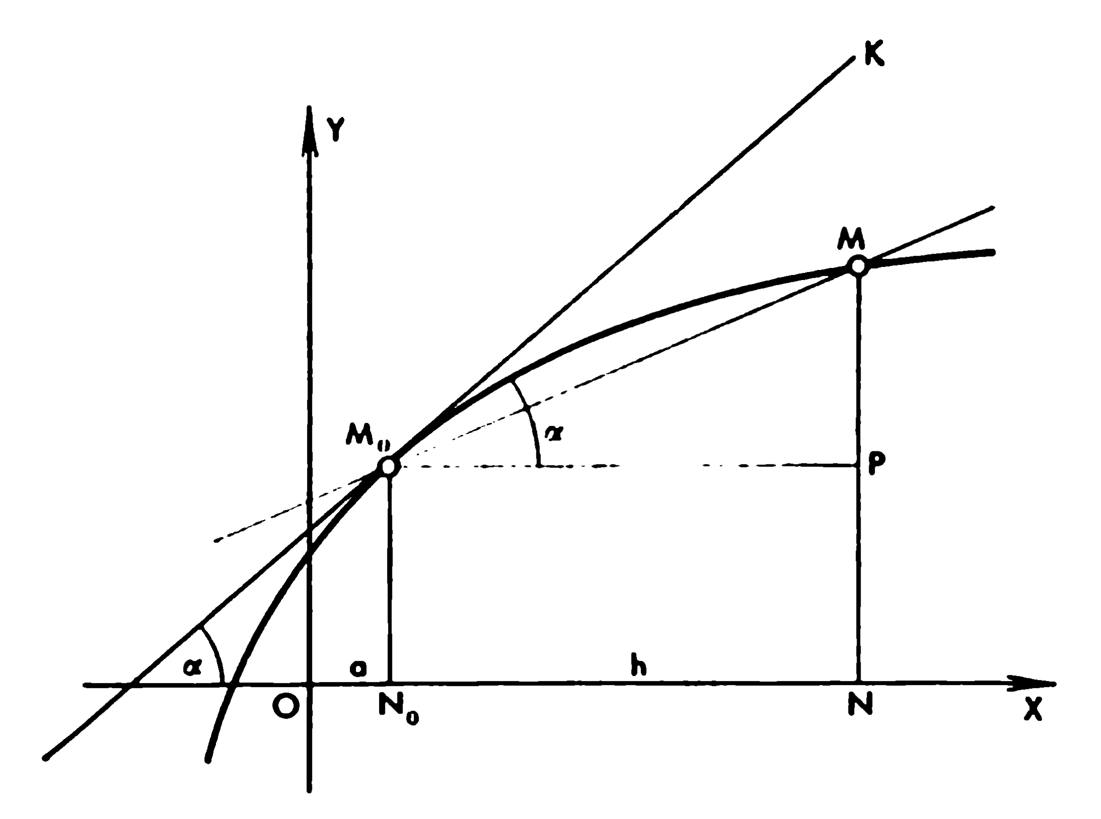


Fig. 14

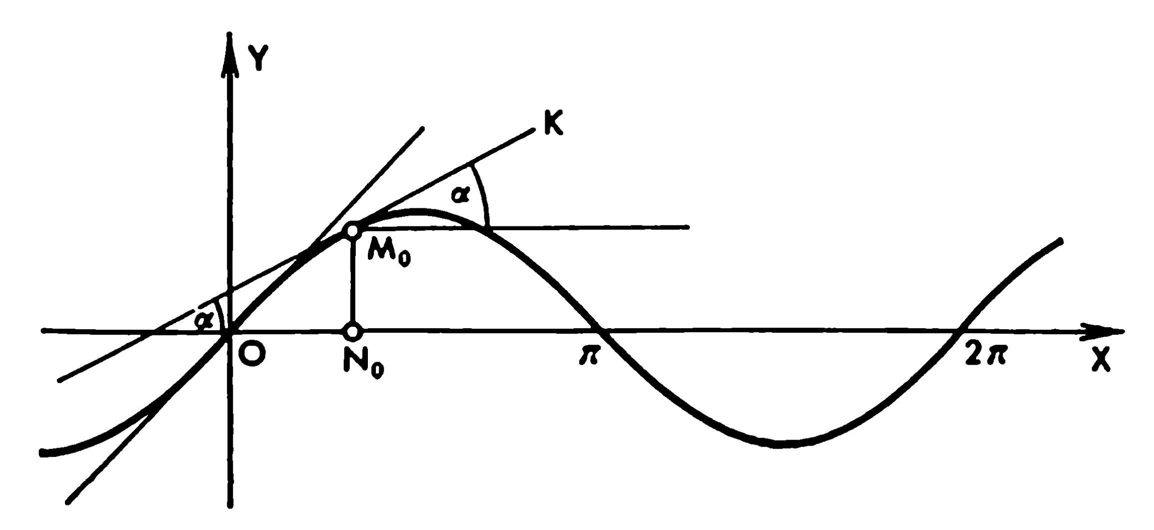


Fig. 15

et nous avons en conséquence

$$\operatorname{tg} \widehat{PM_0M} = \frac{MP}{M_0P} = \frac{MP}{N_0N} = \frac{y_{a+h} - y_a}{h}. \qquad (55)$$

Notons α l'angle PM_0K, c'est-à-dire l'angle formé par l'axe des abscisses et la tangente. Alors, si le point M s'approche de M_0, c'est-à-dire si le segment $N_0N = h$ tend vers zéro, l'angle PM_0M s'approche de α et la tangente de l'angle PM_0M vers tg α. Ainsi, la relation (55) nous donne à la limite (pour $h \to 0$):

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{y_{a+h} - y_a}{h} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{pour } x=a}.$$

Donc, *la tangente de la pente de la tangente est égale à la dérivée de l'ordonnée y par rapport à l'abscisse x pour $x = a$, où a est l'abscisse du point de tangence.*

● EXEMPLE 13. Considérons une sinusoïde (fig. 15), c'est-à-dire une courbe dont l'abscisse et l'ordonnée sont liées par la relation

$$y = \sin x.$$

Comment mener la tangente à cette courbe en un point M_0 d'abscisse a?

La recherche de la tangente de la pente de cette tangente n'est plus un secret pour nous:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{pour } x=a} = \left.\frac{d}{dx}\sin x\right|_{\text{pour } x=a} = \cos a$$

[cf. (36)]. Pour mener la tangente nous devons trouver $\cos a$ (ce n'est pas difficile non plus vu que le segment $M_0N_0 = y = \sin a$ est connu) et tracer la droite M_0K telle que $\operatorname{tg}\alpha = \cos a$. Par exemple, pour $a = 0$, nous avons $\operatorname{tg}\alpha = \cos 0 = 1$, c'est-à-dire que la *tangente à la sinusoïde à l'origine des coordonnées forme avec l'axe des abscisses un angle* $\frac{\pi}{4}$. Pour $a = \frac{\pi}{3}$, il vient $\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, d'où on trouve à l'aide des tables trigonométriques que l'angle α formé par la tangente et l'axe des abscisses est approximativement égal à 26°34′.

Simulation

Nous avons vu que différents phénomènes physiques qui ne présentent au premier coup d'œil rien de commun peuvent être décrits par les mêmes équations différentielles. Il suffit de se rappeler la chute d'un corps dans un milieu offrant une résistance, l'établissement d'un courant et la désintégration des corps radioactifs. La même chose pour les trois problèmes conduisant aux oscillations harmoniques. D'autre part, si deux phénomènes sont décrits par une même équation, la solution de celle-ci décrit les deux phénomènes. Autrement dit, ces phénomènes se déroulent de façon identique (c'est-à-dire que les valeurs des grandeurs physiques correspondantes varient de manière similaire). Aussi pouvons-nous étudier, par exemple, les oscillations électromagnétiques dans un circuit en observant les oscillations

d'un pendule et vice versa. Ce détail fort simple s'avère extrêmement important.

Supposez que vous voulez vérifier par calcul le projet d'une machine compliquée. En effet, construire une machine est une affaire coûteuse et de longue durée, et il est nécessaire de s'assurer d'avance de la justesse du projet. Formons les équations du fonctionnement de la machine (qui sont d'habitude différentielles), puis essayons de les résoudre. Nous connaîtrons le régime de travail de l'appareil et verrons si les calculs sont justes. Cependant, un procédé plus simple s'impose souvent. Construisons un autre appareil (un circuit électrique, par exemple) qui soit décrit par les mêmes équations différentielles que notre machine. Ceci fait, il suffit d'analyser le comportement de l'appareil construit pour avoir une idée de la machine qu'on se propose de fabriquer. Nous avons donc un *modèle* de la machine. La simulation en question est basée elle aussi sur la notion de dérivée puisque la construction d'un bon modèle est inconcevable sans les équations différentielles décrivant la machine étudiée.

CONCLUSION

Les notions de dérivée et d'équation différentielle trouvent des applications extrêmement larges en mathématiques, physique, astronomie et technique. C'est la discipline dite «mathématiques supérieures» qui en étudie les propriétés et les débouchés. Le cadre restreint du présent ouvrage rendrait malheureusement fort difficile toute tentative d'expliciter les idées à la base de la définition de l'*intégration*, qui est, dans un certain sens, l'inverse de la dérivation et constitue, à pied d'égalité avec cette dernière opération, le fondement des mathématiques supérieures.

Nous voudrions retenir votre attention, cher lecteur, sur le fait que les notions des mathématiques supérieures, notamment celle de dérivée, ne sont pas de pures abstractions, mais bien l'*image mathématique des processus se déroulant dans la nature* (dont la vitesse du mouvement mécanique). Sur le plan historique, ces notions sont précisément tributaires des problèmes posés par la vie et, en premier lieu, des exigences de la mécanique (problème de la recherche de la vitesse d'un mouvement) et de la géométrie (problème du tracé d'une tangente). C'est pourquoi cette phrase qu'on trouve dans l'*Anti-Dühring* d'Engels: « Comme toutes les autres sciences, la mathématique est issue des besoins des hommes », s'applique intégralement aux mathématiques supérieures. Produit secondaire de l'étude du *mouvement* des corps, de la *variation* des grandeurs, la notion de dérivée reflète elle-même ce mouvement parce qu'elle est associée à la *variable*. « La grandeur variable de Descartes a marqué un tournant en mathématique. C'est avec elle que le *mouvement* et la *dialectique* sont entrés dans la mathématique et qu'est devenu *tout de suite indispensable le calcul différentiel et intégral*, qui naît d'ailleurs immédiatement et devait être en général et dans l'ensemble mis au point, non pas inventé, par Newton et Leibniz » (Engels, *Dialectique de la Nature*).

Ainsi, les notions des mathématiques supérieures sont nées des besoins de l'homme, avant tout lors de l'étude du mouvement mécanique des corps. Or, le mouvement mécanique n'est pas l'unique dans la nature. La physique ne cesse pas d'étonner le chercheur en lui révélant des lois toujours nouvelles, et les mathématiques ont à décrire des phénomènes et des formes du mouvement hier inconnus. Les théories physiques créées depuis le début de notre siècle (Relativité, physique quantique, théorie nucléaire) appellent un appareil mathématique inédit. Si bien que certaines disciplines mathématiques ne datent que de plusieurs décennies. *Les mathématiques ne sont nullement détachées de la vie, c'est au contraire une science terre-à-terre qui se développe parallèlement avec nos connaissances sur le monde physique.*

TABLE DES MATIÈRES

